



# 51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 09. April 2020

## Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Nina Mitrovic zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge [per E-Mail](#).

Am 06. April 2021 wird das Aufgabenblatt um Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Nina Mitrovic bespricht mit euch die Aufgaben im [virtuellen Olympiade-Kurs](#) am 09. April 2020 von 16:20–18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Dokument um ausgewählte Lösungsvorschläge und Quellenangaben.

[Schreibe uns gerne](#), wenn du an unserem virtuellen Olympiade-Kurs teilnehmen möchtest. Du bist jederzeit herzlich willkommen.

## Aufgaben

**Aufgabe 1.** Für positive reelle Zahlen  $a$  und  $b$  definieren wir:  $a \cdot b = \frac{a-b}{a+b}$ .  
Berechne:

$$\frac{a \cdot b + 1}{b \cdot a - 1} + \frac{a \cdot b + 2}{b \cdot a - 2} + \dots + \frac{a \cdot b + 2020}{b \cdot a - 2020}$$

**Aufgabe 2.** Löse die Ungleichung:

$$\left(1 - \frac{4x^3 - x}{x - 2x^2}\right)^{-3} > 0$$

**Aufgabe 3.** Seien  $a, b, c, d \neq 0$  reelle Zahlen, sodass:  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0$  und  $a + b + c + d + abcd = 0$  gilt.

Berechne:

$$\left(\frac{1}{ab} - \frac{1}{cd}\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$$

**Aufgabe 4.** Löse die Ungleichung:

$$3^{3x} + 3^4 \leq 3^{2x+2} + 3^{x+2}$$

**Aufgabe 5.** Für jede natürliche Zahl  $n$ , ist die Summe der ersten  $n$  Folgenglieder einer Folge  $S_n = 2, 5n^2 - 4, 5n$ . Bestimme alle Folgenglieder mit Werten zwischen 10085 und 10095.

**Aufgabe 6.** Löse die Ungleichung:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{x-1}}} \leq 2019$$

**Aufgabe 7.** Sei  $x = 2017 \cdot 2018 \cdot 2021 \cdot 2022 + 4$ .

Berechne:  $\sqrt{x} - 2020^2$

## Tipps zu ausgewählten Aufgaben

**Aufgabe 1.** Rechne einzelne Terme aus.

**Aufgabe 2.** Faktorisiere den Nenner und Zähler.

**Aufgabe 3.** Ausmultiplizieren und dann die Terme passend gruppieren.

**Aufgabe 4.** Setze  $t = 3^x$  ein

**Aufgabe 5.** Rechne die Folgenglieder explizit aus.

**Aufgabe 6.** Finde Zahlen für die es nicht gilt.

**Aufgabe 7.** Forme  $x$  in einen Ausdruck um, der von  $a = 2020$  abhängt

## Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

### Aufgabe 1.

Wir rechnen den  $k$ -ten Term aus:  $\frac{a \cdot b + 1}{b \cdot a - 1} = \frac{\frac{a-b+k*(a+b)}{a+b}}{\frac{b-a-k*(a-b)}{a+b}} = \frac{(k+1)a+(k-1)b}{-(k+1)a+(-k+1)b} = -1$  Es folgt, dass alle Terme gleich  $-1$  sind, und daher ist die Summe gleich  $-2020$ .

### Aufgabe 2.

Wir schreiben den Term in Klammern als:

$$\frac{4x^3 - x}{x - 2x^2} = \frac{x(4x^2 - 1)}{x(1 - 2x)} = \frac{x(2x - 1)(2x + 1)}{x(1 - 2x)} = -(2x + 1)$$

und wir sehen, dass der Ausdruck für  $x = \frac{1}{2}$  und  $x = 0$  nicht definiert ist. Es folgt dass die Ungleichung genau dann gilt, wenn  $2 + 2x > 0$  ist. Daher sind die Lösungen:  $x > -1$  ohne  $x = 0$  und  $x = \frac{1}{2}$ .

### Aufgabe 3.

Der Ausdruck ist gleich:  $(\frac{1}{ab} - \frac{1}{cd})(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}) = \frac{cd^2 + c^d - abd - abc}{abc^2d^2}$ . Wegen der Voraussetzung gilt:  $bcd + acd + abd + abc = 0$ , daher:

$$\left(\frac{1}{ab} - \frac{1}{cd}\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) = \frac{cd^2 + c^d + bcd + acd}{abc^2d^2} = \frac{cd(a + b + c + d)}{abc^2d^2} = \frac{a + b + c + d}{abcd}$$

und das ist wegen den Voraussetzungen  $-\frac{abcd}{abcd} = -1$

### Aufgabe 4.

Setzen wir  $t = 3^x$  ein. Unsere Gleichung ist dann äquivalent zu

$$t^9 + t^2 - 9t + 81 \leq 0$$

. Wir faktorisieren das aus, und bekommen:  $(t - 3)(t - 9)(t + 3) \leq 0$ . Da  $t + 3$  immer positiv ist, muss  $t$  zwischen 3 und 9 sein. Also sind die Lösungen für  $x$ :  $1 \leq x \leq 2$

### Aufgabe 5.

Wir rechnen  $a_n$  aus:  $a_n = S_n - S_{n-1} = 5n - 7$ .

Wir suchen  $n$  so dass  $10085 < a_n < 10095$ . Dies ist äquivalent zu  $2018.4 < n < 2020.4$ . Die einzigen natürlichen Zahlen in diesem Intervall sind  $n = 2019$  und  $n = 2020$ . Und daher sind die gesuchten Folgenglieder:  $5 * 2019 - 7 = 10088$  und  $5 * 2020 - 7 = 10093$ .

### Aufgabe 6.

Damit der Ausdruck definiert ist, muss gelten  $x - 1 \neq 0$  und  $1 + \frac{1}{x-1} \neq 0$ , und dies ist äquivalent zu  $x \neq 1$  und  $x \neq 0$ . Wir rechnen die rechte Seite aus:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{x-1}} = \frac{1}{\frac{x-x+1}{x}} = x$$

. daher sind die Lösungen  $x \leq 2019$  ohne  $x = 1$  und  $x = 0$ .

### Aufgabe 7.

Wir schreiben 2017, 2018, 2019, 2020 mithilfe  $a = 2020$ :  $x = (a - 3)(a - 2)(a + 1)(a + 2) + 4$ . Wir

multiplizieren das aus:  $x = (a^2 - a - 6)(a^2 - a - 2)$  und setzen  $t = a^2 - a - 4$ . Der Ausdruck ist äquivalent zu  $x = t^2 - 4 + 4 = t^2$  und wir bekommen:

$$x = (2020^2 - 2020 - 4)^2 = (2020^2 - 2024)$$

. Es folgt sofort:  $\sqrt{x} - 2020^2 = -2024$

# Quellenangaben zu den Aufgaben

## Quellen der Aufgaben

### **Aufgabe 1.**

siehe [1], erstellt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team.

### **Aufgabe 2.**

siehe [1], erstellt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team.

### **Aufgabe 3.**

siehe [1], erstellt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team.

### **Aufgabe 4.**

siehe [1], erstellt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team.

### **Aufgabe 5.**

siehe [1], erstellt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team.

### **Aufgabe 6.**

siehe [1], erstellt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team.

### **Aufgabe 7.**

siehe [1], erstellt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team.

## Literatur

- [1] Kroatischer Regionalwettbewerb Natjecanja iz matematike u RH. <http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci-SS.htm> (aufgerufen am 05.05.2021).