51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 07. Mai 2020

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Nina Mitrovic zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 05. Mai 2021 wird das Aufgabenblatt um Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Nina Mitrovic bespricht mit euch die Aufgaben im virtuellen Olympiade-Kurs am 07. Mai 2020 von 16:20–18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Dokument um ausgewählte Lösungsvorschläge und Quellenangaben.

Schreibe uns gerne, wenn du an unserem virtuellen Olympiade-Kurs teilnehmen möchtest. Du bist jederzeit herzlich willkommen.

Aufgaben

Aufgabe 1. Gegeben sei ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis der Länge 6 und Schenkel der Länge 5. Der Kreis, dessen Durchmesser einer der Schenkel ist, schneidet die verbleibenden zwei Seiten des Dreiecks in Punkten E und F. Bestimmen Sie die Länge von EF.

Aufgabe 2. In einem rechtwinkligen Dreieck ABC beträgt die Länge der Hypotenuse $|AB| = c$, und einer Katete $|AC| = \frac{3}{5}c$ Finden Sie den Abstand des Punkts C vom Inkreis dieses Dreiecks.

Aufgabe 3. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks haben die Längen 8cm und 6cm. Innerhalb des Dreiecks ist ein Punkt T gegeben, der 1cm von der kürzeren und 2cm von der längeren Kathete entfernt ist. Wie weit entfernt ist der Punkt von der Hypotenuse? Wie lang ist die Höhe auf die Hypotenuse?

Aufgabe 4. Die Länge einer Höhe in einem Dreieck ist gleich der Summe der Längen der verbleibenden zwei Höhen. Drücken Sie die Länge der kürzesten Seite des Dreiecks durch die Längen der verbleibenden zwei Seiten aus.

Aufgabe 5. Die Länge einer Seite eines Quadrats beträgt $6cm$. Auf den Seiten AB und AD sind die Punkte K und L gegeben, sodass $|AK| = 2\text{cm}$ und $|AL| = 3\text{cm}$. Ein Trapez mit Basis $|KL|$ ist in das Quadrat eingeschrieben. Was ist die größtmögliche Fläche des eingeschriebenen Trapezes?

Aufgabe 6. Die Längen der Höhen des Dreiecks ABC verhaten sich wie $h_a : h_b : h_c = 6 : 2\sqrt{3} : 3$, und der Umfang des Inkreises beträgt 8π. Bestimmen Sie die Längen der Seiten und die Winkel des Dreiecks ABC.

Aufgabe 7. In einem gleichschenkligen Dreieck ABC ($|AC| = |BC|$) sei der Punkt D der Mittelpunkt der Basis AB, DE sei die Höhe des Dreiecks DBC und M der Mittelpunkt der Seite DE. Beweisen Sie, dass AE und CM senkrecht zueinander stehen.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Beweise dass $EBCF$ ein Sehnenviereck ist.

Aufgabe 2. Dručke den Radius des Inkreises durch Seiten des Dreicks aus.

Aufgabe 3. Drücke die Fläche des Dreiecks ABC aus.

Aufgabe 4. Drücke die Fläche auf 3 verschiedenen Weisen aus.

Aufgabe 5. Drücke die Fläche des Quadrats durch Flächen der Dreiecken aus.

Aufgabe 6. Beweise dass das Dreieck rechtwinklig ist.

Aufgabe 7. Skalarprodukt von $\vec{AE}$ und $\vec{CM}$ sollte gleich 0 sein

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.
Da $|AC| = |BC| = 5cm, |AB| = 6cm$ und $\angle CEB = 90$ muss E der Höhenfußpunkt des Dreiecks sein. Da $|AE| = |EB|$ ist und $\angle CAB = \angle CBA = \alpha$ muss $EBCF$ ein Sehnenviereck sein, dh

$$\angle EBC + \angle CFE = 180$$

Dann gilt

$$\angle AFE = 180 - \angle CFE = \angle EBC = \alpha$$

Daraus folgt, dass $|EF| = |AE| = 3cm$.

Aufgabe 2.
Seien D und F die Berührpunkte des Inkreises und Kateten. Dann ist $CFSD$ ein Quadrat mit Diagonale $|CS| = r\sqrt{2}$ und $|CE| = r\sqrt{2} - r$. Die Katete a hat die Länge:

$$a = |BC| = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{c^2 - \frac{9}{25}c} = \frac{4}{5}c$$

Daher ist der Radius

$$r = \frac{a + b - c}{2} = \frac{1}{5}c$$

Aus diesen 2 Gleichungen folgern wir $|CE| = r(\sqrt{2} - 1) = \frac{1}{5}(\sqrt{2} - 1)c$

Aufgabe 3.
Verbinde den Punkt T mit Punkten A, B, C und bekomme Dreiecke ABC, BCT, CAT. Wir suchen die Länge von TD. Sei $a = |BC| = 8$ und $b = |CA| = 6$. Die Länge der Hypothenuse ist dann: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 10$.
Wir drücken jetzt die Fläche des Dreicks auf 2 Weisen aus:

$$\frac{|BC| \cdot |CA|}{2} = P_{ABC} = P_{ABT} + P_{BCT} + P_{CAT}$$

und setzen die bekannten Längen ein: $\frac{8 \cdot 6}{2} = \frac{10x}{2} + \frac{22}{2}$. Es folgt, dass $x = 2,6$ ist und da $\frac{ab}{2} = \frac{ch_c}{2}$ haben wir $h_c = \frac{24}{5} = 4,8$.

Aufgabe 4.
Sei $h_a = h_b + h_c$, dh die kürzeste Seite sei a. Multipilizieren wir die gegebene Gleichung mit $\frac{abc}{2}$:

$$h_a \cdot \frac{abc}{2} = h_b \cdot \frac{abc}{2} + h_c \cdot \frac{abc}{2}$$

Sei F die Fläche des Dreiecks, dann gilt: $Fbc = Fac + Fab$ und daraus folgt

$$a = \frac{bc}{b + c}$$

Aufgabe 5.
Seien M und N die Punkte auf der Basis des Trapez. Die Dreiecke AKL und CNM sind ähnlich. Seien $2x$ und $3x$ die Längen von CN und CM. Wir können die Fläche des Quadrats durch Flächen der 4 Dreiecken ausdrücken:

$$P = 36 - \frac{3 \cdot 2}{2} - \frac{4 \cdot (6 - 3x)}{2} - \frac{3x \cdot 2x}{2} - \frac{3 \cdot (6 - 2x)}{2} = -3x^2 + 9x + 12$$

Die Funktion $f(x) = -3x^2 + 9x + 12$ hat das Maximum in $\frac{3}{2}$. Daraus folgt, dass $P_{max} = \frac{75}{4}$.

Aufgabe 6.
Aus $ah_a = bh_b$ bekommen wir $a : b = h_a : h_b = 1 : \sqrt{3}$. Ähnlich bekommen wir für h_b und h_c: $a : b : c = 1 : \sqrt{3} : 2$. Wir können nun $a = k, b = \sqrt{3}k, c = 2k$ setzen. Es gilt:

$$cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

woraus folgt dass $\alpha = 30$. Andererseits aus

$$cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}$$

folgt $\beta = 60$. Deshalb muss $\gamma = 90$ sein und der Radius des Umkreises ist $r = \frac{c}{2}$. Da sein Umfang 8π beträgt gilt $r = \frac{8\pi}{2\pi} = 4$ und $c = 2r = 8$. Aus $2k = 8$ folgt $k = 4$ und somit auch $a = 4$ und $b = 4\sqrt{3}$.

Aufgabe 7.
Wir haben: $\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{BE}$ und $\vec{CM} = \vec{CD} + \vec{DM}$. Damit können wir den Skalarprodukt $\vec{AE}\vec{CM}$ berechnen:
$\vec{AE} \cdot \vec{CM} = (\vec{AE} + \vec{BE})(\vec{CD} + \vec{DM}) =$
$\vec{BE} \cdot \vec{CD} + \vec{AB} \cdot \vec{DM} =$
$\vec{CD}(\vec{BD} + \vec{DE} + 2\vec{DM} \cdot \vec{DB})$
$\vec{CD} \cdot \vec{BD} + \vec{CD} \cdot \vec{DE} + \vec{DE} \cdot \vec{DB}$
$\vec{DE}(\vec{CD} + \vec{DB}) = \vec{DE} \cdot \vec{DB}$=0
Daraus folgt, dass AE und CM normal zueinanderestehen.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Quellen der Aufgaben

Aufgabe 1.
siehe [1], erstellt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 2.
siehe [1], erstellt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 3.
siehe [1], erstellt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 4.
siehe [1], erstellt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 5.
siehe [1], erstellt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 6.
siehe [1], erstellt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 7.
siehe [1], erstellt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team.

Literatur

[1] Kroatischer Regionalwettbewerb Natjecanja iz matematike u RH. http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci-SS.htm. (aufgerufen am 31.05.2021).