51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 21. Mai 2021

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Veronika Schreitter zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 18. Mai 2021 wird das Aufgabenblatt um Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Veronika Schreitter bespricht mit euch die Aufgaben im virtuellen Olympiade-Kurs am 21. Mai 2021 von 16:20–18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Dokument um ausgewählte Lösungsvorschläge und Quellenangaben.

Schreibe uns gerne, wenn du an unserem virtuellen Olympiade-Kurs teilnehmen möchtest. Du bist jederzeit herzlich willkommen.

Aufgaben

Aufgabe 1. Wenn die Schüler ein Klasse in ihrem Klassenraum sitzen, sind manche Schüler benachbart. Die Schüler sitzen so, dass jeder Schüler jedem anderen Schüler eine Nachricht zukommen lassen kann, indem er einen Zettel von Schüler zu Schüler weitergeben lässt, wobei jeder Schüler nur an einen benachbarten Schüler weitergeben kann. Die Schüler schreiben einen Test. Es ergibt sich, dass die Punktezahl jedes Schülers dem Durchschnitt der Punktezahlen seiner Nachbarn entspricht. Man beweise: Jeder Schüler der Klasse hat diesselbe Punktezahl.

Aufgabe 2. Von n Ländern ist jedes entweder eine Demokratie oder eine Monarchie. Jedes Jahr kann ein Land, das mehr Nachbarländer mit der anderen Staatsform als Nachbarländer mit derselben Staatsform hat, seine Staatsform wechseln. Jedes Jahr wechselt genau ein Land seine Staatsform. Man zeige, dass dieser Prozess irgendwann enden muss.

Aufgabe 3. Wir haben eine $m \times n$ Tabelle reeller Zahlen gegeben. Eine Operation besteht darin, das Vorzeichen aller Einträge einer Zeile oder eine Spalte zu ändern.
Zeige, dass wir durch solche Operationen erreichen können, dass die Summe der Einträge in jeder Zeile und jeder Spalte nichtnegativ ist.

Aufgabe 4. Tausend Personen befinden sich in den Räumen einer Villa mit hundert Räumen. Jede Minute, falls sich nicht alle Personen im selben Raum befinden, geht eine Person von ihrem Raum in einem Raum mit mindestens genauso vielen Personen darin.
Zeige, dass sich irgendwann alle Personen im selben Raum befinden.

Aufgabe 5. Ein Raum ist am Anfang leer. Jede Minuten betreten entweder zwei Personen den Raum oder eine Person verlässt den Raum.
Ist es möglich, dass nach genau $3^{3^{3^3}}$ Minuten genau $3^{3^3}+1$ Personen im Raum sind?

Aufgabe 6. Wir beginnen mit der Menge $\{3, 4, 12\}$. In jedem Schritt wählen wir zwei dieser Zahlen aus, a und b, und ersetzen sie durch $0.6a - 0.8b$ und $0.8a + 0.6b$.
Ist es möglich, durch solche Schritte die Menge $\{4, 6, 12\}$ zu erreichen?

Aufgabe 7. In einem 10×10-Feld sind neun Quadrate mit giftigem Efeu kontaminiert. Immer wenn ein Quadrat mindestens zwei benachbarte kontaminierte Quadrate hat, wird es auch kontaminiert (benachbart sind die vier horizontal und vertikal angrenzenden Quadrate).
Zeige, dass sich der giftige Efeu nicht auf das gesamte Feld ausbreiten kann.

Aufgabe 8. Wir haben endlich viele rote und blaue Punkte in der Ebene gegeben mit der folgenden Eigenschaft: Auf der Verbindungsstrecke zweier gleichfarbigen Punkte liegt immer ein Punkte der anderen Farbe.
Zeige, dass alle Punkte auf einer einzigen Geraden liegen.

Aufgabe 9. n gegebene Punkte in der Ebene haben die Eigenschaft, dass auf der Geraden durch zwei der Punkte immer noch mindestens ein dritter Punkt liegt.
Müssen die n Punkte alle auf einer Geraden liegen?

Aufgabe 10. Die Felder eines $n \times n$-Schachbretts werden mit den Zahlen von 1 bis n^2 beschriftet (jede Zahl kommt genau einmal vor).
Zeige, dass es ein Paar horizontal, vertikal oder diagonal benachbarter Felder gibt, deren Werte sich um mindestens $n + 1$ unterscheiden.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Betrachte den Schüler mit den meisten Punkten.

Aufgabe 2. Betrachte die Anzahl an benachbarten Ländern mit unterschiedlicher Staatsform.

Aufgabe 3. Was passiert, wenn wir immer die Vorzeichen in einer Zeile oder Spalte ändern, deren Summe negativ ist?

Aufgabe 4. Betrachte den Raum mit den meisten Personen. Wie kann er sich verändern?

Aufgabe 5. Die Zahlen sollen in erster Linie einschüchtern. Betrachte das Beispiel mal für 81 Minuten und 4 Personen.

Aufgabe 6. Finde eine Invariante, das heißt eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to R$ für die gilt: $f(a, b, c) = f(0.6a - 0.8b, 0.8a + 0.6b, c)$.

Aufgabe 7. Betrachte den Umfang der kontaminierten Region.

Aufgabe 8. Betrachte das Dreieck mit der kleinsten Fläche, dass aus den Punkten gebildet werden kann.

Aufgabe 9. Betrachte denjenigen Punkt und diejenige Gerade durch zwei Punkte, die den kleinsten Abstand voneinander haben.

Aufgabe 10. Betrachte die Felder mit den Beschriftungen 1 und n^2.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Veronika Schreitter, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.
Wir betrachten einen der Schüler mit den meisten Punkten. Seine Punktezahl ist der Durchschnitt der Punktezahlen seiner Nachbarn. Da diese Punktezahlen aber kleiner oder gleich seiner Punktezahl sind, müssen sie alle gleich seiner Punktezahl sein. Nur gilt analog für jeden seiner Nachbarn, dass sie auch die höchste Punktezahl haben und daher alle ihre Nachbarn ebenfalls diesselbe Punktezahl haben. Wenn man das fortführt, haben also alle Schüler, die man vom ersten Schüler aus über Nachbarn erreichen kann, diesselbe Punktezahl. Laut der Zettel-Bedingung in der Angabe sind das alle Schüler.

Aufgabe 2.
Wir betrachten die Anzahl an Paaren von Ländern die benachbart sind und unterschiedliche Staatsform haben. Wenn ein Land seine Staatsform ändert, hat es danach weniger Nachbarn mit einer anderen Staatsform als davor. Die Anzahl dieser Paare sinkt also jedes Jahr. Sie kann allerdings nicht unendlich lange sinken, da sie nie negativ werden kann. Also muss der Prozess irgendwann enden, weil kein Land mehr seine Staatsform wechseln kann.

Aufgabe 3.
Wir wenden die Operation immer auf eine Zeile oder Spalte an, deren Summe negativ ist. Dadurch muss offensichtlich die Summe aller Einträge in der gesamten Tabelle strikt größer werden. Die Summe kann allerdings nicht ewig größer werden, da sie nur endlich viele verschiedene Werte annehmen kann (2^{mn} Werte, um genau zu sein, da jede der mn Zahlen das Vorzeichen $+$ oder $-$ haben kann.) Also muss dieser Prozesss irgendwann enden, indem wir keine Zeile oder Spalte mehr finden, deren Summe negativ ist.

Aufgabe 4.
Seien die Zahlen $a_1, ..., a_{100}$ die Anzahlen der Personen in den verschiedenen Räumen, absteigend geordnet nach Größe. Wir ordnen die n-Tupel ganzer Zahlen lexikographisch, das bedeutet, um $(a_1, ..., a_n)$ und $(b_1, ..., b_n)$ zu vergleichen, vergleichen wir zuerst a_1 und b_1, dann a_2 und b_2 etc bis wir das erste Mal a_i und b_i finden, die nicht gleich groß sind. Wenn $a_i > b_i$ gilt, gilt $(a_1, ..., a_{100}) > (b_1, ..., b_{100})$ und umgekehrt.
Was passiert jetzt mit unserem Zahlentupel $(a_1, ..., a_{100})$, wenn eine Person in einen Raum mit mindestens genauso vielen Personen wechselt? Nun, ein a_i wird um 1 kleiner und ein a_j wird um 1 größer. Und dabei gilt $j < i$, weil wir ja in einen Raum mit mehr Personen wechseln. (Falls in beiden Räumen gleich viele Personen sind, ist es egal, wie sie angeordnet sind. Also können wir annehmen, dass die Person in den erstgereihten dieser Räume wechselt.) Offensichtlich gilt $(a_1, ..., a_j, ..., a_i, ..., a_{100}) < (a_1, ..., a_j + 1, ..., a_i - 1, ..., a_{100})$. Wir müssen nun eventuell $(a_1, ..., a_j + 1, ..., a_i - 1, ..., a_{100})$ wieder nach der Größe sortieren, also $a_j + 1$ etwas nach links und $a_i - 1$ etwas nach rechts rücken. Dadurch wird das 100-Tupel offensichtlich höchstens größer. Insgesamt werden gemäß unserer Ordnung die 100-Tupel immer größer. Also werden wir irgendwann beim größten möglichen 100-Tupel, bei dem die Summer der Einträge 1000 ist, ankommen, und zwar bei $(1000, 0, 0, ..., 0)$. Also sind irgendwann alle Personen in einem Raum.

Aufgabe 5.
Wir sehen, dass sich die Anzahl an Personen modulo 3 immer um $+2$ ändert. Da die Anzahl der Minuten durch drei teilbar ist, ändert sich die Anzahl an Personen also insgesamt um eine durch drei teilbare Anzahl. Die gewünschte Anzahl an Personen ist aber nicht durch drei teilbar, also ist es nicht möglich.

Aufgabe 6.
Sei $f(a,b,c) = a^2+b^2+c^2$. Dann gilt $f(0.6a-0.8b, 0.8a+0.6b, c) = 0.36a^2-0.96ab+0.64b^2+0.64a^2+0.96ab+0.36b^2+c^2 = a^2+b^2+c^2$. Wenn wir diese Funktion auf die Zahlen in der Menge anwenden, erhalten wir also immer den gleichen Wert, egal wie oft wir diese Operation durchführen. Es gilt aber $3^2+4^2+12^2 \neq 4^2+6^2+12^2$, also ist es nicht möglich, von $\{3,4,12\}$ zu $\{4,6,12\}$ zu kommen.

Aufgabe 7.
Wir betrachten den Umfang der kontaminierten Region. Wenn ein nicht kontaminiertes Quadrat kontaminiert wird, war es davor zu mindestens zwei kontaminierten Quadraten benachbart. Der Umfang sinkt also um mindestens zwei. Gleichzeitig kann es zu bis zu zwei nicht kontaminierten Quadraten benachbart sein, wodurch der Umfang um bis zu zwei größer wird. Insgesamt kann daher der Umfang durch die Kontamination nicht größer werden, sondern nur kleiner werden oder gleich blieben. Am Anfang sind neun Quadrate kontaminiert, also ist der Umfang höchstens 36. Das gesamte Feld hat aber den Umfang 40, also kann nicht das ganze Feld kontaminiert werden.

Aufgabe 8.
Falls nicht alle Punkte auf einer einzige Gerade liegen, gibt es Punkte, die ein nicht-entartetes Dreieck bilden. Wir betrachten unter diesen Dreiecken das Dreieck mit der kleinsten Fläche. Ein solches minimales Dreieck muss existieren, da wir nur endlich viele Punkte und daher endlich viele Dreiecke haben. Mindestens zwei der Eckpunkte dieses Dreiecks müssen diesselbe Farbe haben. Also liegt auf der entsprechenden Seite des Dreiecks ein weiterer Punkt. Dieser Punkt bildet aber mit zweien der drei Eckpunkte ein Dreieck mit kleinerer Fläche. Dann hätten wir aber am Anfang nicht das Dreieck mit der kleinsten Fläche gewählt. Also kann es gar keine Dreiecke geben, es liegen alle Punkte auf einer Geraden.

Aufgabe 9.
Falls nicht alle Punkte auf einer Geraden liegen, gibt es für jede Gerade durch zwei Punkte Punkte, die nicht auf dieser Geraden liegen. Wir betrachten denjenigen Punkt und diejenige Gerade durch zwei Punkte, die den kleinsten Abstand voneinander haben. Da wir nur endlich viele Punkte haben, existiert so ein Paar mit minimalem Abstand sicher. Wir nennen den Punkt P und die Gerade g. Wir legen eine Normale h durch P auf g. Auf g müssen drei Punkte liegen, und dementsprechend mindestens zwei auf der gleichen Seite von h. Seien A und B diese beiden Punkte, wobei A näher an h liege als B. Nun sehen wir aber, dass der Punkt A näher an der Geraden PB liegt als der Punkt P an der Geraden g. Um das exakt zu beweisen, sei S der Lotfußpunkt von P auf g (also der Schnittpunkt von g und h) und T der Lotfußpunkt von A auf PB, so sehen wir, dass die Dreiecke PSB und ATB zueinander ähnlich sind, aber ATB kleiner ist. Daher ist AT kürzer als PS. Das ist ein Widerspruch dazu, dass wir die Gerade und den Punkt mit kleinstem Abstand gewählt haben. Also müssen alle Punkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Aufgabe 10.
Wir betrachten die beiden Felder mit den Beschriftungen 1 und n^2. Man sieht leicht, dass wir eine Folge von höchstens n Feldern finden können, die mit dem Feld 1 beginnt, mit dem Feld n^2 endet und in der aufeinanderfolgende Felder immer benachbart sind. Hätten jetzt die benachbarten Felder in dieser Folge jeweils einen Differenz kleiner $n+1$, also höchstens n, könnte die Differenz der Felder 1 und n^2 höchstens $(n-1) \cdot n = n^2 - n$ sein. Sie ist aber größer, nämlich $n^2 - 1$, wir haben also einen Widerspruch.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Quellen der Aufgaben

Aufgabe 1.

Aufgabe 2.
siehe [4, Problem 4], bearbeitet von Veronika Schreitter, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 3.
siehe [1, Problem 7], bearbeitet von Veronika Schreitter, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 4.
siehe [4, Example 2], bearbeitet von Veronika Schreitter, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 5.
siehe [5, Problem 5], bearbeitet von Veronika Schreitter, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 6.
siehe [5, Example 3], bearbeitet von Veronika Schreitter, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 7.
siehe [4, Problem 6], bearbeitet von Veronika Schreitter, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 8.
siehe [2, Example 2], bearbeitet von Veronika Schreitter, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 9.
siehe [3], bearbeitet von Veronika Schreitter, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 10.
siehe [2, Example 4], bearbeitet von Veronika Schreitter, bearbeitet vom MmF-Team.

Literatur

[1] Art of Problem Solving. https://artofproblemsolving.com/community. (aufgerufen am 20.05.2021).

[2] Extremal Principle. https://brilliant.org/wiki/extremal-principle/. (aufgerufen am 20.05.2021).

[3] Sylvester's Problem. https://www.cut-the-knot.org/proofs/SylvesterKelly.shtml. (aufgerufen am 20.05.2021).

[4] Jenya Soprunova. Monovariants. https://imosuisse.ch/smo/pruefungen/smo2018/vorrunde/pruefung/vorrunde_2018_de.pdf. (aufgerufen am 20.05.2021).

[5] Misha Lavrov. Te Invariance Principle. https://www.math.cmu.edu/~cargue/arml/archive/15-16/proofs-02-28-16-solutions.pdf. (aufgerufen am 20.05.2021).