51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen Kurs „Mathematik macht Freu(n)de" – Aufgabenblatt für den 11. Juni 2021

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Veronika Schreitter zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 08. Juni 2021 wird das Aufgabenblatt um Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Veronika Schreitter bespricht mit euch die Aufgaben im virtuellen Olympiade-Kurs am 11. Juni 2021 von 16:20–18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Dokument um ausgewählte Lösungsvorschläge und Quellenangaben.

Schreibe uns gerne, wenn du an unserem virtuellen Olympiade-Kurs teilnehmen möchtest. Du bist jederzeit herzlich willkommen.

Aufgaben

Aufgabe 1. Für jeden Modul $m \in \mathbb{N}$ existieren unendlich viele Fibonacci-Zahlen, die kongruent zu -1 modulo m sind.

Aufgabe 2. $a|b \Leftrightarrow F_a|F_b$

Aufgabe 3. $\operatorname{ggT}(F_a, F_b) = F_{\operatorname{ggT}(a,b)}$

Aufgabe 4. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} = F_{n+1}$

Aufgabe 5. $F_{m+n} = F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1}$

Aufgabe 6. $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$

Aufgabe 7. Wenn n größer wird, nähert sich $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ immer mehr an $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ an.

Aufgabe 8. Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ ist definiert durch $a_0 = 2, a_1 = 4$ und $a_{n+1} = \frac{a_n a_{n-1}}{2} + a_n + a_{n-1}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Bestimme alle Primzahlen p, für die es mindestens einen Index $m \geq 1$ gibt, sodass p die Zahl $a_m - 1$ teilt.

Aufgabe 9. Ein $200 \times 3-$Rechteck wird in $2 \times 1-$Rechtecke zerlegt. Zeige, dass die Anzahl der Möglichkeiten dafür durch 3 teilbar ist.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Zeige, dass die Fibonacci-Zahlen modulo m periodisch sind. Erweitere die Fibonacci-Zahlen auf negative Indizes, und finde F_{-1} und F_{-2}.

Aufgabe 2. $F_0 = 0$ ist hier wichtig.

Aufgabe 3. Wir können das direkt aus Aufgabe 2 folgern.

Aufgabe 4. Auf wie viele Arten können wir $1 \times 2-$Dominos auf ein $1 \times n-$Feld legen?

Aufgabe 5. Verwende wieder Dominos wie bei Aufgabe 4 und teile das Feld geschickt auf.

Aufgabe 6. Induktion nach n mithilfe von Aufgabe 5.

Aufgabe 7. 1. Bestimme $\frac{F_n}{F_{n-1}} - \frac{F_{n+1}}{F_n}$.
2. Folgere: $|\frac{F_m}{F_{m-1}} - \frac{F_{n+1}}{F_n}| \leq |\frac{F_n}{F_{n-1}} - \frac{F_{n+1}}{F_n}|$ für alle $m \geq n$. Das garantiert, dass sich $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ an einen eindeutigen Wert q annähert.
3. Setze $F_{n+1} = qF_n = q^2 F_{n-1}$ in die Fibonacci-Rekursion ein.

Aufgabe 8. 1. Finde eine Folge $b_n = f(a_n)$, die die Rekursion $b_{n+1} = b_n b_{n-1}$ erfüllt.
2. Drücke dann b_n und a_n explizit mithilfe von Fibonacci-Zahlen als Exponenten aus.
3. Gehe nun ähnlich zu Aufgabe 1 vor.

Aufgabe 9. Sei a_n die Anzahl der Zerlegungen eines $2n \times 3-$Rechtecks. Finde eine Rekursionsformel für a_n.