AUFGABENSAMMLUNG
FORTGESCHRITTENE WS 2020/21

Diese Sammlung ist eine Auswahl an Aufgaben, die während des Wintersemester 2020/21 mit Olympionik*innen der Universität Wien als Online-Kurse zur Vorbereitung auf den Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene der 52. Österreichischen Mathematik-Olympiade bearbeitet wurden.

Alle Aufgaben sind hierbei in vier Teile aufgeteilt: Angabe, Hinweise, Lösung und Quellenangabe.

Fragen und Feedback per E-Mail sind jederzeit willkommen.

Inhaltsverzeichnis

Datum: 3. März 2021.

1. Algebra

Gleichungen und Gleichungssysteme.

Aufgabe 1.1. Finde alle natürlichen Zahlen n, für die gilt:

$$\lfloor 1^{1/4} \rfloor + \lfloor 2^{1/4} \rfloor + \ldots + \lfloor n^{1/4} \rfloor = \frac{3}{2}n + 1.$$

Aufgabe 1.2. Bestimme die Lösungen der Gleichung

$$(a+1)(1+x+x^2) = (a+1)(1+x^2+x^4)$$

in Abhängigkeit vom reellen Parameter a.

Aufgabe 1.3. Beweise, dass es keine rationale Zahl x gibt, mit

$$\{x^2\} + \{x\} = 1.$$

Finde mindestens eine solche Zahl.
Anmerkung: $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$, wobei mit $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x bezeichnet wird.

Aufgabe 1.4. Bestimme die Summe:

$$\sum_{n=1}^{2012} \tan(n) \cdot \tan(n+1).$$

Aufgabe 1.5. Beweise, dass

$$\cos\left(\frac{\pi}{2 \cdot 3^n}\right)$$

für alle natürlichen Zahlen n irrational ist.

Aufgabe 1.6. Bestimme alle reellen Lösungen des Gleichungssystems:

$$2a^2 - 2ab + b^2 = a$$
$$4a^2 - 5ab + 2b^2 = b$$

Ungleichungen.

Aufgabe 1.7. Genau eine der beiden Zahlen x^2 und $(1-x)^2$ ist kleiner als 1.
Beweise, dass $0 \leq x^2 - x \leq 2$ gilt.

Aufgabe 1.8. Seien x und y verschiedene reelle Zahlen mit $2xy + 1 \neq 0$. Seien die beiden Zahlen A und B definiert als

$$A = \frac{6x^2y^2 + xy - 1}{2xy + 1} \qquad \text{und}$$
$$B = \frac{x(x^2-1) - y(y^2-1)}{x - y}.$$

Welche der beiden Zahlen ist größer?

Aufgabe 1.9. Seien a, b und c reelle Zahlen mit $a \leq b \leq c$.
Beweise, dass die folgende Ungleichung gilt:

$$c^2 - b^2 + a^2 \geq (c - b + a)^2.$$

Aufgabe 1.10. Seien a, b und c die Längen der Seiten eines Dreiecks mit Fläche P. Beweise:

$$P < \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Aufgabe 1.11. Seien x und y reelle Zahlen mit $\sin(x) + \sin(y) = \frac{1}{3}$.
Beweise, dass

$$\sin(3x) + \sin(3y) \leq \frac{26}{27}$$

gilt.

Polynome.

Aufgabe 1.12. Finde das Minimum des Ausdrucks

$$a^2 + 5b^2 + 8c^2 - 4ab - 4bc - 8c + 24$$

wobei a, b und c reelle Zahlen sind. Bestimme auch jene Zahlen, für die das Minimum angenommen wird.

Aufgabe 1.13. Seien a_0, $a_1, \ldots, a_{n-1}$ und a_n reelle Zahlen, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$a_0 + a_1 x + \ \ldots \ + a_n x^n = (x+1)^3 \cdot (x+2)^3 \ \cdots \ (x+672)^3.$$

Bestimme den Wert der Summe

$$a_2 + a_4 + a_6 + \ \ldots \ + a_{2016}.$$

2. Kombinatorik

Aufgabe 2.1. Eine große Anzahl an Kreisscheiben ist in einem Kreis angeordnet, sodass sich benachbarte Scheiben immer überlappen (und nicht benachbarte Scheiben sich nie überlappen). Wir nennen eine Scheibe oben, wenn sie auf ihren beiden Nachbarn liegt, und unten, wenn unter ihren beiden Nachbarn liegt. Zeige, dass es immer gleich viele obere und untere Scheiben gibt, egal wie viele Scheiben im Kreis sind und wie sie sich überlappen.

Aufgabe 2.2. Gegeben sei ein $n \times n-$Schachbrett mit $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. Wie viele Möglichkeiten gibt es, $2n-2$ identische Steine auf dem Schachbrett zu platzieren (jeden auf einem anderen Feld), sodass sich keine zwei Steine auf derselben Diagonalen des Schachbretts befinden? Zwei Steine befinden sich auf derselben Diagonalen des Schachbretts, wenn die Verbindungslinie der Mittelpunkte ihrer Felder parallel zu einer Diagonalen des $n \times n-$Quadrates ist.

Aufgabe 2.3. Ein Grundstück hat die Form eines $8 \times 8-$Quadrats, dessen Seiten in Nord-Süd- bzw. Ost-West-Richtung orientiert sind. Es ist in 64 quadratische $1 \times 1-$Parzellen zerlegt. In jeder dieser Parzellen kann höchstens ein Haus stehen, jedes Haus belegt genau eine Parzelle. Ein Haus „erhält kein Sonnenlicht“, wenn die drei Nachbarparzellen im Osten, Süden und Westen mit Häusern verbaut sind.
Man bestimme die maximale Anzahl von Häusern, die gebaut werden können, sodass keines davon kein Sonnenlicht erhält.
Anmerkung: Die Häuser am östlichen, südlichen und westlichen Rand des Grundstücks erhalten immer Sonnenlicht.

Aufgabe 2.4. Gegeben sei ein konvexes $n-$Eck mit einer Triangulierung, das heißt einer Zerlegung in lauter Dreiecke durch einander nicht schneidende Diagonalen.
Man zeige: Man kann mit den Ziffern der Zahl 2007 die n Eckpunkte so markieren, dass jedes Viereck aus 2 (längs einer Kante) benachbarten Dreiecken 9 als Summe der Zahlen auf seinen 4 Eckpunkten hat.

Aufgabe 2.5. Wir betrachten Zerlegungen eines regelmäßigen $n-$Ecks in $n-2$ Dreiecke durch $n-3$ Diagonalen, die sich innerhalb des $n-$Ecks nicht schneiden. Eine zweifärbige Triangulierung ist eine solche Zerlegung eines $n-$Ecks, in der jedes Dreieck schwarz oder weiß ist, sodass je zwei Dreiecke mit einer gemeinsamen Seiten verschiedene Fraben haben. Wir nennen eine positive ganze Zahl $n \geq 2$ triangulierbar, wenn jedes regelmäßige $n-$Eck eine zweifärbige Triangulierung besitzt, wobei für jeden Eckpunkt A des $n-$Ecks gilt: Die Anzahl der schwarzen Dreiecke, bei denen A ein Eckpunkt ist, ist größer als die Anzahl der weißen Dreiecke, bei denen A ein Eckpunkt ist.
Man bestimme alle triangulierbaren Zahlen.

3. Geometrie

Dreiecke, Vielecke und Flächen.

Aufgabe 3.1. Sei D der Lotfußpunkt vom Punkt C auf die Basis AB eines gleichschenkligen Dreiecks ABC. Der Punkt M sei der Mittelpunkt der Seite CD. Die Geraden BM und AC schneiden einander im Punkt E.
Bestimme das Verhältnis $|CE| : |AC|$

Aufgabe 3.2. Die Seite BC sei die längste Seite des gleichschenkligen Dreiecks ABC. Sei M auf der Seite BC, sodass $|BM| = |AB|$. Der Lotfußpunkt von Punkt M auf die Seite BC sei N.
Beweise, dass das Dreieck BMN und das Viereck $ACMN$ die gleiche Fläche und denselben Umfang haben.

Aufgabe 3.3. Anna hat ein Rechteck mit zwei blauen Seiten der Länge 24 und zwei roten Seiten der Länge 36 gezeichnet. Jeden Punkt innerhalb des Rechtecks färbte sie mit der Farbe, der nächstliegenden Seite. Die Punkte, die genauso weit von roten und blauen Seiten sind, färbte sie schwarz. Bestimme die Fläche des roten Teils des Rechtecks.

Aufgabe 3.4. Das Quadrat ABC hat die Seite der Länge 1. Sei X ein Punkt auf der Seite AB, und sei Y ein Punkt auf der Seite AD sodass der Winkel $\angle CHY = 90°$.
Bestimme den Punkt X für den die Fläche des Dreiecks CDY am kleinsten ist.

Aufgabe 3.5. Der Umfang eines rechtwinkligen Dreiecks ist 18 und seine Fläche ist 9. Wie lang ist die Hypotenuse dieses Dreiecks?

Kreise.

Aufgabe 3.6. Der Punkt P ist der Mittelpunkt der Seite AB mit Länge 2. Sei T der Berührpunkt der Tangente von A an den Kreis mit dem Durchmesser PB.
Bestimme die Länge $|PT|$.

Aufgabe 3.7. Gegeben sind 2 Kreise mit Radien r_1 und r_2, die einander nicht schneiden. Ihre gemeinsame innere Tangente berührt die Kreise in den Punkten P und Q, und die äußere in den Punkten A und B.
Bestimme die Länge $r_1 \cdot r_2$ wenn $|AB| = 16$ und $|PQ| = 12$ sind.

Aufgabe 3.8. Seien p und q reelle Zahlen. Der Graph der Funktion $f(x) = x^2 + px + q$ schneidet die Achsen in 3 verschiedenen Punkten A, B und C.
Beweise, dass der Umkreis des Dreiecks ABC die y-Achse in einem Punkt der Form $(a, 1)$ schneidet.

Aufgabe 3.9. *Augapfelsatz.* Gegeben seien zwei Kreise k_1 und k_2 mit disjunktem Inneren. Die beiden Tangenten durch den Mittelpunkt von k_1 und k_2 schneiden k_1 in A_1 und B_1, und die Tangenten durch den Mittelpunkt von k_2 und k_1 schneiden k_2 in A_2 und B_2.
Man zeige, dass $|A_1B_1| = |A_2B_2|$.

Geometrisches Optimieren.

Aufgabe 3.10. Man beweise ohne Differentialrechnung, dass unter allen Dreiecken mit Flächeninhalt 1 das gleichseitige Dreieck den kleinsten Umfang hat.

Aufgabe 3.11. Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC. Man finde unter allen Dreiecken PQR, sodass P auf der Strecke BC, Q auf der Strecke AC und R auf der Strecke BC liegt, dasjenige mit dem kleinsten Umfang.

Aufgabe 3.12. Es sei ABC ein Dreieck, dessen Winkel alle kleiner als 120° sind. Man finde den Punkt F im Inneren des Dreiecks, sodass die Summe $|AF| + |BF| + |CF|$ minimal ist.

Aufgabe 3.13. Einem Kreis sind ein Quadrat und ein gleichseitiges Dreieck eingeschrieben. Die sieben Eckpunkte bilden ein dem Kreis eingeschriebenes konvexes Siebeneck S. (Als Sonderfall kann S ein Sechseck sein, wenn eine Dreiecksecke mit einer Quadratecke zusammenfällt.)
Für welche Lagen des Dreiecks relativ zum Quadrat hat S den größten bzw. kleinsten Flächeninhalt?

Trigonometrie.

Aufgabe 3.14. Es sei ABC ein Dreieck mit Seitenlängen a, b und c, sowie Innenwinkeln α, β und γ. Man zeige den Sinussatz

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c},$$

und den Cosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma).$$

Aufgabe 3.15. Es sei AB eine Sehne im Kreis k. Auf der Verlängerung von AB über B hinaus liege ein Punkt T. Eine Tangente durch T an k berühre den Kreis in C.
Man zeige: $|BT| : |TC| = |BC| : |CA|$.

Aufgabe 3.16. Sei ABC ein Dreieck mit Umkreis k. Der Seitenmittelpunkt von BC sei M. Die Gerade AM schneide k ein zweites Mal in D. Die Winkelsymmetrale schneide BC in T, und die Spiegelung der Geraden AM schneide BC in E. Man beweise folgende Verhältnisse: (1) $|BD| : |DC| = |CA| : |AB|$, (2) $|BT| : |TC| = |BA| : |AC|$ und (3) $|BE| : |TE| = |BA|^2 : |AC|^2$.

Aufgabe 3.17. Sei ABC ein Dreieck, und M der Mittelpunkt der Seite BC.
Man zeige, dass $\sin(\angle BAM) : \sin(\angle MAC) = |AC| : |AB|$ gilt. Die Gerade AM schneide den Umkreis des Dreiecks ABC ein zweites Mal in D. Zeige, dass $|AB| \cdot |BD| = |AC| \cdot |CD|$ gilt.

Aufgabe 3.18. Sei ABC ein Dreieck mit Umkreis k. Die Tangenten an k durch B und C schneiden einander in T, und die Gerade AT schneide k ein zweites Mal in D.
Man zeige, dass $|AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |BD|$ gilt. Nun sei N der Mittelpunkt der Strecke AD. Man zeige, dass die Dreiecke ABN und CAN sowie BDN und DCN jeweils zueinander ähnlich sind.

Aufgabe 3.19. Man zeige die Summensätze für den Sinus und Cosinus,

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \qquad \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta),$$

für $0 \leq \alpha, \beta \leq 90°$.

Aufgabe 3.20. Sei ABC ein Dreieck. Man zeige, dass alle vier Normalprojektionen von A auf die Innen- und Außenwinkelsymmetralen durch die Punkte B und C auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Aufgabe 3.21. Sei $ABCD$ ein Quadrat. Nun werden die Seiten AB, BC, CD und DA in ihren Anfangspunkten A, B, C bzw. D um jeweils $15°$ nach innen gedreht. Man zeige, dass das von ihnen eingeschlossene, kleinere Quadrat den Inkreis des großen Quadrats als Umkreis hat.

Aufgabe 3.22. Ein Punkt T liege außerhalb eines Kreises k. Die Tangenten an k durch T berühren k in P und Q, und eine weitere Gerade durch T schneide k in A und B. Der Mittelpunkt von AB sei mit M bezeichnet. Man zeige, dass die Winkel $\angle AMP$ und $\angle QMA$ gleich sind.

Aufgabe 3.23. Im Dreieck ABC befindet sich einen Punkt T, sodass $|AT| = 56$, $|BT| = 40$ und $|CT| = 35$. Die Lotfußpunkte von T auf die Seiten des Dreiecks ABC bilden ein gleichseitiges Dreieck. Bestimme den Winkel $\angle ABC$.

4. Zahlentheorie

Teilbarkeit, Teiler und Vielfache.

Aufgabe 4.1. Beweise, dass die Zahl bestehend aus 2187-Mal der Ziffer 1 durch 2187 teilbar ist.

Aufgabe 4.2. Sei n eine zusammengesetzte natürliche Zahl und d_1, d_2, $\ldots$, d_{m-1} und d_m ihre Teiler. Beweise, dass

$$\frac{2}{\log(n^m)} \sum \log(d_k) = 1$$

gilt.

Aufgabe 4.3. Man bestimme die kleinste positive ganze Zahl x, sodass alle folgenden Brüche gekürzt sind, das heißt Zähler und Nenner relativ prim sind:

$$\frac{3x+9}{8}, \frac{3x+10}{9}, \frac{3x+11}{10}, \ldots, \frac{3x+49}{48}.$$

Aufgabe 4.4. Man zeige: Es gibt unendlich viele Vielfache von 2005, die (ohne führende Nullen) alle 10 Ziffern 0, 1, 2, ..., 8 und 9 gleich oft enthalten.

Aufgabe 4.5. Finde alle positiven ganzen Zahlen a, b, c mit

$$\mathrm{kgV}(a, b, c) = a + b + c.$$

Aufgabe 4.6. Beweise, dass für jede ungerade natürliche Zahl n

$$24 | n^n - n$$

gilt.

Aufgabe 4.7. Zeige, dass die Zahl $(a_n\ a_{n-1}\ \ldots\ a_0)_{10}$ geschrieben im Dezimalsystem genau dann durch 7 teilbar ist, wenn

$$7 | (a_n\ a_{n-1}\ \ldots\ a_1)_{10} + 5 \cdot a_0$$

gilt.
(Beispielsweise gilt $7|364$, da $7 \mid \underbrace{36 + 5 \cdot 4}_{56}$.)

Summe und Differenz.

Aufgabe 4.8. Es sei $A_0 = \{1, 2\}$ und für $n > 0$ entsteht A_n aus A_{n-1} indem man zu A_{n-1} die natürlichen Zahlen hinzu nimmt, die sich als Summe von zwei verschiedenen Zahlen aus A_{n-1} darstellen lassen.
Es sei $a_n = |A_n|$ die Anzahl der Zahlen in A_n.
Man bestimme a_n als Funktion von n.

Aufgabe 4.9. Welche positive ganzen Zahlen lassen sich als Differenz zweier Quadratzahlen schreiben?

Aufgabe 4.10. Zeige, dass

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \cdot k^2}{k+1} = -\frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{3} - \frac{3^2}{4} \pm \cdots + \frac{(2n)^2}{2n+1}$$

für kein n eine ganze Zahl ist.

Primzahlen.

Aufgabe 4.11. Man bestimme alle Primzahlen p, für die $5^p + 4p^4$ eine Quadratzahl ist.

Aufgabe 4.12. Man zeige: Für 42 paarweise verschiedene Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_{42}$ kann die Summe

$$\sum_{j=1}^{42} \frac{1}{p_j^2 + 1}$$

kein Stammbruch $1/n^2$ mit $n \in \mathbb{Z}^+$ sein.

Aufgabe 4.13. Man zeige: Ist $2^m - 1$ eine Primzahl und $m > 1$, dann ist m auch eine Primzahl.

Aufgabe 4.14. Man zeige: Ist $2^m + 1$ eine Primzahl, so ist m eine Zweierpotenz.

Aufgabe 4.15. Finde die größte ganze Zahl a, sodass $a | p^4 - 1$ für jede Primzahl $p > 5$.

Ziffern.

Aufgabe 4.16. Wenn man die ersten zwei Ziffern einer positiven ganzen Zahl löscht, erhält man eine Zahl, die 73 Mal kleiner ist als die ursprüngliche Zahl.
Bestimme die beiden kleinsten Zahlen mit dieser Eigenschaft.

Aufgabe 4.17. Sei n eine positive ganze Zahl. Wir betrachten $S(n)$, die Summe der 2001 Potenzen von n mit den Exponenten 0 bis 2000. Also

$$S(n) = \sum_{k=0}^{2000} n^k = n^0 + n^1 + n^2 + \ldots + n^{2000}.$$

Was ist die Einerziffer von $S(n)$ im Dezimalsystem?

Aufgabe 4.18. Man bestimme die letzten beiden Ziffern von 2019^{2021}.

Diophantische Gleichung.

Aufgabe 4.19. Finde alle ganzzahligen Lösungen (a, b) von

$$3a - 5b = 7 + 9ab.$$

Aufgabe 4.20. Beweise, dass die Gleichung

$$x^2 = 2y^2 - 75y + 5$$

keine ganzzahligen Lösungen hat.

Aufgabe 4.21. Beweise, dass die Gleichung

$$3x^4 + 2013 = 25y^2 - 24x^2$$

keine ganzzahligen Lösungen hat.

Aufgabe 4.22. Man zeige, dass es keine ganzen Zahlen x, y gibt, mit

$$x^3 + 6y^3 = 2020.$$

Aufgabe 4.23. Zeige, dass die Gleichung

$$4a(a+1) = b(b+3)$$

keine Lösung in den positiven ganzen Zahlen besitzt.

Aufgabe 4.24. Finde alle natürlichen Zahlen a und b, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$a^3 - 3b = 15$$
$$b^2 - a = 13$$

Hinweise zu den Aufgaben

Aufgabe 1.1. Beweise, dass $n \leq 81$ sein muss.

Aufgabe 1.2. Faktorisiere $x^4 + x^2 + 1$

Aufgabe 1.3. Benutze $\left\{\frac{p^2}{q^2}\right\} = \frac{m}{q^2}$ für ein $m < q^2$

Aufgabe 1.4. Nutze die trigonometrische Formel: $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$.

Aufgabe 1.5. Beweis durch Widerspruch: Betrachte ein minimales n für das der Ausdruck rational ist.

Aufgabe 1.6. Gewöhnliche Methoden für Gleichungssysteme

Aufgabe 1.7. Fallunterscheidung

Aufgabe 1.8. Faktorisiere die Ausdücke in den Zählern und betrachte $A - B$.

Aufgabe 1.9. Forme den Ausdruck um.

Aufgabe 1.10. Betrachte den Winkel gegenüber der Seite mit Länge a

Aufgabe 1.11. Nutze die Formel der trigonometrische Funktion des dreifachen Winkels: $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin(x)^3$.

Aufgabe 1.12. Forme den Ausdruck um und schreibe ihn als Summe von Quadraten.

Aufgabe 1.13. Bezeichne den gegebenen Ausdruck mit $P(x)$ und betrachte $P(1)$, $P(0)$ und $P(-1)$.

Aufgabe 2.1. Was passiert, wenn wir eine Scheibe aus dem Kreis entfernen, die weder oben noch unten ist?

Aufgabe 2.2. Wähle zuerst aus, auf welche Diagonalen Steine kommen und lege dann der Reihe nach auf jede Diagonale einen Stein.

Aufgabe 2.3. Eine etwas leichtere Formulierung der Angabe wäre vielleicht: Wir betrachten ein Rechteck mit 7 Zeilen und 6 Spalten. Wie viele Tetrominos (Figuren aus vier angrenzenden Einheitsquadraten), die die Form eines auf dem Kopf stehenden T haben, braucht man, um das Rechteck zu überdecken? Dabei dürfen die Tetrominos überlappen und am Rand über das Rechteck stehen.

Aufgabe 2.4. Verwende vollständige Induktion.

Aufgabe 2.5. Zähle, wie viele Eckpunkte die schwarzen und weißen Dreiecke jeweils insgesamt haben müssen.

Aufgabe 3.1. Betrachte den Schwerpunkt des Dreiecks BCD

Aufgabe 3.2. Betrachte den Mittelpunkt der Seite BC.

Aufgabe 3.3. Betrachte die Symmetralen der Winkeln BAD und ADC.

Aufgabe 3.4. Bestimme die Fläche in Abhängigkeit der Länge $|AX|$.

Aufgabe 3.5. Satz des Pythagoras

Aufgabe 3.6. Betrachte den Mittelpunkt der Seite PB. Satz von Pythagoras.

Aufgabe 3.7. Betrachte die Mittelpunkte der Kreise.

Aufgabe 3.8. Potenz vom Punkt $(0, 0)$

Aufgabe 3.9. Verhältnisse aufstellen.

Aufgabe 3.10. Wenn das Dreieck nicht gleichseitig ist, kann man den Umfang immer verringern - dies kann elementar bewiesen werden.

Aufgabe 3.11. Vorgangsweise ähnlich wie beim ersten Beispiel. Spiegeln der Figur an den Dreiecksseiten.

Aufgabe 3.12. Rotieren des Beispiels um 60° in einem Eckpunkt; Dreiecksungleichung.

Aufgabe 3.13. Die Lage des Dreiecks und des Quadrats sieht im Grunde genommen immer gleich aus - über je drei von vier Seiten des Quadrats liegt genau ein Eckpunkt des Dreiecks. Man zerlege den Flächeninhalt des Siebenecks entsprechend.

Aufgabe 3.14. Für den Sinussatz berechne man die Längen der Höhen auf jeweils zwei Arten. Für den Cosinussatz finde man zunächst ein rechtwinkliges Dreieck mit c als Hypotenuse und drücke dessen Kathetenlängen in den gewünschten Größen aus.

Aufgabe 3.15. Tangentenwinkelsatz und Sinussatz.

Aufgabe 3.16. Sinussatz.

Aufgabe 3.17. Wieder Sinussatz.

Aufgabe 3.18. Ein längeres Beispiel, bei dem zuerst bewiesen werden sollte, dass AD gespiegelt an der Winkelsymmetrale durch A eine Schwerlinie von ABC ist. Die Gerade AD und die analog definierten Geraden durch B und C werden Symmedianen genannt.

Aufgabe 3.19. Sinus-Flächenformel im bekannten Einheitskreis-Bild benutzen.

Aufgabe 3.20. Man berechne den Abstand der vier Punkte zur Geraden BC trigonometrisch.

Aufgabe 3.21. Man berechne das Seitenverhältnis der beiden Quadrate.

Aufgabe 3.22. Nahe verwandt mit der Konfiguration aus Aufgabe 3.18.

Aufgabe 3.23. Trigonometrie. Sinussatz.

Aufgabe 4.1. Nutze die Primfaktorzerlegung, $2187 = 3^7$ und führe einen Beweis mit vollständiger Induktion.

Aufgabe 4.2. Gruppiere d_i in Paare, deren Produkt gleich n ist

Aufgabe 4.3. $\frac{3x+(k+1)}{k}$ ist gekürzt, wenn $\frac{3x+1}{k} = \frac{3x+1+k}{k} - 1$ gekürzt ist.

Aufgabe 4.4. Betrachte

$$A_n := \underbrace{1234567890\ldots1234567890}_{n\text{ - mal}} = 1234567890 \cdot (1 + 10^{10} + 10^{20} + \ldots + 10^{10(n-1)})$$

und anschließend die Differenzen $A_n - A_m$.

Aufgabe 4.5. Zeige zunächst, dass es genügt den Fall $\mathrm{ggT}(a, b, c) = 1$ zu betrachten. Nachdem man o.B.d.A $a \leq b \leq c$ einführt erhält man schnell $\mathrm{kgV}(a, b, c) = 2c$. Wieso?

Aufgabe 4.6. Benutze $n^n - n = n(n^{n-1} - 1)$ und zeige, dass der Ausdruck sowohl durch 3 als auch durch 8 teilbar ist.

Aufgabe 4.7. Schreibe die Zahl $(a_n\ a_{n-1}\ \ldots\ a_0)_{10}$ als $(a_n\ a_{n-1}\ \ldots\ a_1)_{10} \cdot 10 + a_0$ und multipliziere mit 5.

Aufgabe 4.8. Berechne die ersten A_n und stelle eine Vermutung auf. Lässt sich diese mit Induktion zeigen?

Aufgabe 4.9. Experimentiere zuerst mit der Differenz aufeinander folgender Quadratzahlen, dann mit Quadratzahlen die 2 „Schritte“ voneinander entfernt sind. Beweise schließlich, dass man so alle möglichen Differenzen gefunden hat.

Aufgabe 4.10. Schreibe die Brüche zuerst als Summe von ganzen Zahlen und vereinfachten Brüchen.

Aufgabe 4.11. Die Gleichung $5^p + 4p^4 = x^2$ lässt sich nach kurzer Umformung faktorisieren.

Aufgabe 4.12. Ausmultiplizieren und modulo 3 betrachten.

Aufgabe 4.13. Benutze die Regel $a - 1 | a^n - 1$, die man beispielsweise mit der geometrischen Summenformel beweisen kann.

Aufgabe 4.14. Benutze die Regel $a + 1 | a^n + 1$ für ungerade n, die man beispielsweise mit der geometrischen Summenformel beweisen kann.

Aufgabe 4.15. Stelle zuerst mit Hilfe der ersten beiden relevanten Primzahlen $p = 7$ und $p = 11$ eine Vermutung auf.

Aufgabe 4.16. Betrachte die Gleichung modulo 5 und 25

Aufgabe 4.17. Zeige und benutze $n^k \equiv n^{k+4} \pmod{10}$

Aufgabe 4.18. Wir wollen also $2019^{2021} \pmod{100}$ bestimmen. Teile die Aufgabe in modulo 4 und modulo 25 auf. Finde anschließend (mit möglichst geringem Rechenaufwand) eine kleine Zahl a, sodass $2019^a \equiv 1 \pmod{25}$ gilt...

Aufgabe 4.19. Forme nach b um und zeige, dass der entstehende Bruch zu nahe an $1/3$ liegt um eine ganze Zahl zu sein, wenn $|a|$ groß ist.

Aufgabe 4.20. Quadratische Reste modulo 5

Aufgabe 4.21. Finde einen geeigneten Modul, der zum Widerspruch führt.

Aufgabe 4.22. Finde eine geeignete Primzahl p und betrachte die Gleichung modulo dieser Primzahl.

Aufgabe 4.23. Addiere 1 auf beiden Seiten und schreibe die linke Seite anschließend als vollständiges Quadrat...

Aufgabe 4.24. Beweise, dass $a \leq 3$ gelten muss.

LÖSUNGSVORSCHLÄGE

Aufgabe 1.1.
Sei

$$a_n = \lfloor 1^{1/4} \rfloor + \lfloor 2^{1/4} \rfloor + \ldots + \lfloor n^{1/4} \rfloor.$$

Gesucht ist ein n mit $a_n = \frac{3}{2}n + 1$.

Wir sehen, dass $\lfloor k^{1/4} \rfloor = 1$ für $k < 16$. Deswegen gilt $a_n = n$ für $n \leq 15$, und keiner dieser Werte erfüllt somit die Gleichung.

Für $16 \leq n \leq 80$ gilt $a_n = 1 + 1 + \ldots + 1 + 2 + \ldots + 2 = 15 + 2 \cdot (n - 15) = 2n - 15$.

Damit die Gleichung für $16 \geq n \geq 80$ gilt, muss $2n - 15 = \frac{3}{2}n + 1$ gelten. Die einzige Lösung dieser Gleichung ist $n = 32$.

Größere Lösungen gibt es nicht: Wenn $n > 80$ um 1 steigt, steigt der Wert der linke Seite um mindestens 3, und der Wert der rechten Seite um $\frac{3}{2}$, d.h. die lenkte Seite bleibt größer als rechte.

Aufgabe 1.2. Es gilt

$$\begin{aligned} 1 + x^2 + x^4 &= (1 + x + x^2)^2 - (2x + 2x^2 + 2x^3) \\ &= (1 + x + x^2)((1 + x + x^2) - 2x). \end{aligned}$$

Wir formen unter Verwendung dieser Tatsache die gegebene Gleichung um:

$$\begin{aligned} (a-1)(1 + x + x^2)^2 &= (a+1)(1 + x + x^2)((1 + x + x^2) - 2x) \\ (1 + x + x^2)(-2(1 + x + x^2) + 2x(a+1)) &= 0 \\ (1 + x + x^2)(1 - ax + x^2) &= 0. \end{aligned}$$

Die Gleichung $x^2 + x + 1 = 0$ hat keine reellen Lösungen.

Die Diskriminante von $1 - ax + x^2 = 0$ ist $D = a^2 - 4$. Daraus folgt, dass sie nur dann reelle Lösungen hat, wenn $|a| \geq 2$ ist.

Wir schließen, dass die Gleichung für $a \in (-2, 2)$ keine reelle Lösungen hat, für $a = 2$ die Lösung $x = 1$ und für $a = -1$ die Lösung $x = -1$. Für $a < -2$ und $a > 2$ hat sie zwei reelle Lösungen, nämlich $x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$.

Aufgabe 1.3. Wir setzen $x = \frac{p}{q}$. Dann gilt: $\{x^2\} + \{x\} = \{\frac{p^2}{q^2}\} + \{\frac{p}{q}\}$. Wir sehen, dass $\{\frac{p^2}{q^2}\} = \frac{m}{q^2}$ für ein $m < q^2$ und $\{\frac{p}{q}\} = \frac{n}{q}$ für ein $n < q$ wobei m und n teilerfremd zu q sind.

Dann ist
$$\{x^2\} + \{x\} = \frac{m}{q^2} + \frac{n}{q} = \frac{m+nq}{q^2}$$
unkürzbar. Es könnte also nur $m + nq = q^2$ sein, aber dann wäre $\{x^2\} + \{x\} = 0$, ein Widerspruch.

Finden wir jetzt ein $x < 1$ für das gilt: $x^2 + x = 1$. Die (irrationale) Lösung dieser Gleichung ist $x = \frac{1}{2}(\sqrt{(5)} - 1)$.

Aufgabe 1.4. Wir benutzen die Formel
$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}.$$
Setzen wir $x = n+1$ und $y = n$, so gilt:
$$\tan(n+1)\tan(n) = \frac{\tan(n+1) - \tan(n)}{\tan 1} - 1$$

Beim Summieren kürzen sich alle Terme außer dem ersten und letzten:
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2012} \tan(n)\tan(n+1) &= \frac{\tan 2 - \tan 1}{\tan 1} - 1 + \ldots + \frac{\tan 2013 - \tan 2012}{\tan 1} - 1 \\ &= \frac{\tan 2013 - \tan 1}{\tan 1} - 2012 = \frac{\tan 2013}{\tan 1} - 2013.\end{aligned}$$

Aufgabe 1.5.
Es gilt die trigonometrische Formel:
$$\cos(3x) = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$
Für $\frac{\pi}{2\cdot 3^n}$ gilt also:
$$\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 3^{n-1}}\right) = 4\cos^3\left(\frac{\pi}{2\cdot 3^n}\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 3^n}\right).$$

Für $n = 1$ ist, $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}/2$ irrational.

Sei n die kleinste natürliche Zahl, für die $\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 3^n}\right)$ rational ist.

Dann gilt aber, dass $\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 3^{n-1}}\right)$ auch rational ist, was ein Widerspruch zur Minimalität von n ist.

Aufgabe 1.6. Wir multiplizieren die erste Gleichung mit 2 und subtrahieren sie von der zweiten:
$$ab = 2a - b.$$

Da $a = -1$ nicht gelten kann, schreiben wir $b = \frac{2a}{a+1}$.

Wir setzen diesen Ausdruck in die erste Gleichung ein und erhalten:

$$2a^2 - 2a \cdot \frac{2a}{a+1} + \frac{4a^2}{(a+1)^2} = a$$
$$2a^4 - a^3 - a = 0$$
$$a(a-1)(2a^2 + a + 1) = 0.$$

Daraus folgt nach Produkt-Null-Satz, dass entweder $a = 0$ oder $a = 1$ oder $2a^2 + a + 1 = 0$ gelten muss. Für $a = 0$ erhalten wir $b = 0$, und für $a = 1$ erhalten wir $b = 1$. Das ergibt die beiden Lösungspaare $(0, 0)$ und $(1, 1)$.

Die Gleichung $2a^2 + a + 1 = 0$ hat Diskriminante -7 und daher gibt es keine weitere reelle Lösung.

Aufgabe 1.7. Es gilt entweder

$$x^2 \leq 1 \leq (1-x)^2$$

oder

$$(1-x)^2 \leq 1 \leq x^2.$$

Im ersten Fall gilt: $x^2 \leq 1$, d.h. $x \in [-1, 1]$, und $(1-x)^2 \geq 1$, d.h. $x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$. Dann sind beide Voraussetzungen für $x \in [-1, 0]$ erfüllt.

Im zweiten Fall gilt: $x^2 \geq 1$ dh $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, und $(1-x)^2 \leq 1$ d.h. $x \in [0, 2]$. Dann sind beide Voraussetzungen für $x \in [1, 2]$ erfüllt.

Also ist die erste Voraussetzung äquivalent zu $x \in [-1, 0] \cup [1, 2]$.

Bestimmen wir, wann die Ungleichung $0 \leq x^2 - x \leq 2$ gilt.

Aus $x(x-1) > 0$ folgt $x \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$, und aus $(x-2)(x+1) < 0$ folgt $x \in [-1, 2]$.

Es folgt, dass beide Ungleichungen für $x \in [-1, 0] \cup [1, 2]$ gelten.

Aufgabe 1.8.
Wir vereinfachen die beiden Ausdrücke:

$$A = \frac{6x^2y^2 + 3xy - 2xy - 1}{2xy + 1} = \frac{3xy(2xy+1) - (2xy+1)}{2xy+1} = 3xy - 1 B = \frac{x(x^2-1) - y(y^2-1)}{x-y} = \frac{(x^3-y^3) -}{x -}$$

Wir betrachten die Differenz $B - A$:

$$B - A = (x^2 + xy + y^2 - 1) - (3xy - 1) = (x-y)^2 \geq 0.$$

Daraus folgt, dass $A < B$ ist.

Aufgabe 1.9.
Durch Äquivalenzumformungen wird die Ungleichung wie folgt übergeführt:

$$\begin{aligned}
&c^2 - (c-b+a)^2 + a^2 - b^2 \geq 0 \\
\Leftrightarrow &(b-a)(2c-b+a) + (a-b)(a+b) \geq 0 \\
\Leftrightarrow &(b-a)(2c-b+a-a-a) \geq 0 \\
\Leftrightarrow &2(b-a)(c-b) \geq 0.
\end{aligned}$$

Diese Ungleichung gilt, weil nach Voraussetzung $a \leq b$ und $b \leq c$ sind.

Aufgabe 1.10. Sei α der Winkel gegenüber der Seite mit Länge a.

Aus der trigonometrischen Flächenformel $P = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha)$ folgt:

$$P = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha) \leq \frac{1}{2}bc,$$

d.h. $2P \leq bc$, und analog $2P \leq ca$ und $2P \leq ab$.

Summieren der Ungleichungen ergibt

$$6P \leq bc + ca + ab.$$

Wir sehen, dass Gleichheit genau dann gilt, wenn $\alpha = 90°$, daher kann nicht gleichzeitig $P = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}ca = \frac{1}{2}ab$ gelten.

Es gilt also: $6P < ab + bc + ab < a^2 + b^2 + c^2$.

Aufgabe 1.11.
Wir benutzen die Formel für die Sinus-Funktion eines dreifachen Winkels: $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin(x)^3$. Demnach gilt auch

$$\sin(3x) + \sin(3y) = 3(\sin(x) + \sin(y)) - 4(\sin(x)^3 + \sin(y)^3). \tag{1}$$

Wir bezeichnen nun $\sin(x)$ mit a und $\sin(y)$ mit b. Wenn wir die Identität $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ nutzen und das zusammen mit $b = \frac{1}{3} - a$ für die rechte Seite der Gleichung (1) einsetzen, erhalten wir:

$3(a+b) - 4(a^3 + b^3) = 1 - 4(a^2 - \frac{1}{3} \cdot a + \frac{1}{27})$.

Wir müssen nun nur noch die folgende Ungleichung beweisen:

$$1 - 4(a^2 - \frac{1}{3}a + \frac{1}{27} \leq \frac{26}{27}.$$

Diese ist äquivalent zu $36a^2 - 12a + 1 \geq 0$.

Aus $36a^2 - 12a + 1 = (6a - 1)^2 \geq 0$ folgt die Behauptung.

Aufgabe 1.12.
Wir können den Ausdruck wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} a^2 + 5b^2 + 8c^2 - 4ab - 4bc - 8c + 24 &= (a^2 - 4ab + 4b^2) + b^2 + 8c^2 - 4bc - 8c + 24 \\ &= (a - 2b)^2 + b^2 + 8c^2 - 4bc - 8c + 24 \\ &= (a - 2b)^2 + (b - 2c)^2 + (2c - 2)^2 + 20 \end{aligned}$$

Da Quadrate immer ≥ 0 sind, wird das Minimum genau dann angenommen, wenn alle Quadrate gleichzeitig 0 sind. Um das Minimum zu erhalten muss also folgendes gelten: $a - 2b = b - 2c = 2c - 2 = 0$. Man sieht einfach, dass das für $a = 4$, $b = 2$ und $c = 1$ eintritt. Daraus folgt, dass das Minimum 20 ist.

Aufgabe 1.13.
Wir bezeichnen den gegebenen Ausdruck $a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ mit P(x). Werten wir dieses Polynom $P(x)$ an den Stellen $x = 1$ und $x = -1$ aus, so erhalten wir die beiden Gleichungen

$P(1) = a_0 + a_1 + ... + a_{2015} + a_{2016}$ und

$P(-1) = a_0 - a_1 + ... - a_{2015} + a_{2016}$.

Summieren wir die beiden Gleichungen, so bleiben nur die Folgenglieder mit geraden Indizes übrig:

$P(1) + P(-1) = 2a_0 + 2a_2 + ... + 2a_{2016}$

Da $a_0 = P(0)$ ist, gilt

$$a_2 + a_4 + .. + a_{2016} = \frac{1}{2}(P(1) + P(-1)) - P(0).$$

Aus der gegebenen Gleichung für $P(x)$ können wir die Werte an den drei Stellen berechnen:

$P(0) = 1^3 \cdot 2^3 \cdots 672^3 = (672!)^3$,

$P(1) = 2^3 \cdot 3^3 \cdots 673^3 = (673!)^3$ und

$P(-1) = 0.$

Daraus folgt, dass der gesuchte Wert

$$a_2 + a_4 + ... + a_{2016} = \frac{1}{2}(P(1) + P(-1)) - P(0) = \frac{1}{2}(673!)^3 - (672!)^3$$

ist.

Aufgabe 2.1. Wir ordnen jeder Kreisscheibe eine Zahl zu: Die Ausgangszahl ist 0. Dann wird 1 addiert, falls die Kreisscheibe über der im Uhrzeigersinn nächsten Kreisscheibe liegt, und 1 subtrahiert, falls die Kreisscheibe unter der im Uhrzeigersinn nächsten Kreisscheibe liegt. Dann wird genauso nochmal 1 addiert oder subtrahiert, je nachdem, ob die Kreisscheibe über oder unter der gegen den Uhrzeigersinn nächsten Kreisscheibe liegt. Dadurch haben obere Kreisscheiben die Zahl 2, untere Kreisscheiben die Zahl -2 und alle anderen Kreisscheiben die Zahl 0. Gleichzeitig muss aber die Summe der Zahlen 0 sein, da für jede Überlappungsfläche zu einer Kreisscheibe 1 addiert wird und von der anderen Kreisscheibe 1 subtrahiert wird. Also muss es gleich viele obere wie untere Kreisscheiben geben.
Anmerkung: Alternativ kann man auch folgendermaßen argumentieren: Man kann eine Kreisscheibe, die weder oben noch unten ist, aus dem Kreis entfernen und die beiden Nachbarn so überlappen, dass die Nachbarn immer noch obere Kreisscheiben bzw. untere Kreisscheiben sind, wenn sie das vorher waren. Wenn man das oft genug macht, bleibt ein Kreis aus nur oberen und unteren Kreisscheiben übrig, die sich daher abwechseln müssen.

Aufgabe 2.2. Antwort: Es gibt 2^n Möglichkeiten.
Betrachten wir alle Diagonalen, die parallel zu einer bestimmten Diagonale des $n \times n-$Quadrates sind. Es gibt $2n - 1$ solche Diagonalen. Die beiden äußersten bestehen jeweils aus einem Feld, die beiden nächstinneren aus jeweils zwei Feldern usw., bis schließlich die innerste Diagonale aus n Feldern besteht. Da wir $2n - 2$ Steine auf dem Schachbrett verteilen sollen, darf also nur eine dieser Diagonalen frei bleiben. Wir sehen, dass die beiden äußersten Diagonalen, die jeweils nur aus einem Feld bestehen, durch eine Diagonale in die andere Richtung verbunden sind. Eine dieser beiden äußersten Diagonalen muss also frei bleiben.
Wir legen jetzt zuerst einen Stein auf das Feld von einer dieser beiden äußersten Diagonalen. Dabei haben wir zwei Möglichkeiten, welche der beiden wir wählen. Nun betrachten wir die beiden nächstinneren Diagonalen, die aus jeweils drei Feldern bestehen. Durch die Diagonale in die andere Richtung blockiert der erste Stein die mittleren Felder dieser beiden Diagonalen. Wir haben also nur jeweils 2 Feldern in diesen beiden Diagonalen übrig und wir sehen, dass es nur zwei Möglichkeiten gibt, wie wir zwei Steine auf diese beiden Diagonalen legen, sodass sich diese nicht wieder durch

Diagonalen in die andere Richtung blockieren. Genauso geht es jetzt immer weiter. Von den beiden nächstinneren Diagonalen sind immer nur die beiden äußersten Felder nicht blockiert, wodurch wir zwei Möglichkeiten haben, wie wir die nächsten zwei Steine auf diese beiden Diagonalen legen. Schließlich werden auch bei der innersten Diagonale nur die beiden äußersten Felder frei sein und wir haben zwei Möglichkeiten, auf welches dieser Felder wir den letzten Stein legen.
Also hatten wir insgesamt $n-$mal zwei Möglichkeiten, wie wir die nächsten Steine legen. Das ergibt insgesamt 2^n Möglichkeiten.

Aufgabe 2.3. Es können höchstens 50 Häuser gebaut werden.
Wenn wir in der dritten und sechsten Spalte (wobei Spalten in Nord-Süd-Richtung gehen) des Grundstücks jeweils nur in die südlichste Parzelle ein Haus bauen und ansonsten in jede Parzelle ein Haus bauen, erhalten wir eine gültige Konfiguration mit 50 Häusern.
Wir teilen nun jede Zeile außer der südlichsten in der Mitte in zwei Teile. Dadurch erhalten wir 14 $1 \times 4-$Rechtecke, die das gesamte Grundstück außer der südlichsten Zeile überdecken. Wir können nun jedem Rechteck eine unverbaute Parzelle zuordnen, sodass jede unverbaute Parzelle nur einem Rechteck zugeordnet ist. Daraus folgt dann, dass es mindestens 14 unverbaute Parzellen gibt. Unsere Zuordnungsvorschrift ist die folgende:
Wenn das Rechteck eine unverbaute Parzelle enthält, weisen wir ihm die westlichste unverbaute Parzelle im Rechteck zu. Wenn das Rechteck keine unverbaute Parzelle enthält, weisen wir ihm die östlichste unverbaute Parzelle im Rechteck darunter zu (bzw. in den 4 südlich angrenzenden Parzellen, falls unter dem Rechteck kein weiteres Rechteck ist).
Wir sehen jetzt: Wenn wir einem Rechteck eine unverbaute Parzelle zuweisen, die nicht in diesem Rechteck liegt, muss es im Rechteck darunter mindestens zwei unverbaute Parzellen geben (da sonst im oberen Rechteck die beiden mittleren Häuser nicht beide Sonnenlicht erhalten). Von diesen unverbauten Parzellen wird die östlichste dem oberen Rechteck und die westlichste dem unteren Rechteck zugeordnet. Also kann es nicht passieren, dass zwei Parzellen demselben Rechteck zugeordnet werden.
Anmerkung: Alternativ kann man auch zeigen, dass mindestens 14 Parzellen unverbaut bleiben, indem man zeilenweise von Süden nach Norden vorgeht und zeigt, dass in den ersten $k + 1$ Zeilen mindestens $2k$ Parzellen unverbaut bleiben müssen.

Aufgabe 2.4. Wir beweisen sogar eine etwas allgemeinere Aussage: Man kann die Eckpunkte so mit den Buchstaben a, b, c und d markieren, dass die Ecken jedes Vierecks aus 2 benachbarten Dreiecken mit 4 verschiedenen Buchstaben markiert sind. Wählen wir dann z.B. $a = b = 0, c = 2, d = 7$, so folgt die gewünschte Aussage.
Wie gehen mittels vollständiger Induktion vor. Für $n \leq 3$ gibt es nichts zu zeigen, da kein Viereck existiert. Für $n = 4$ können wir einfach die 4 Eckpunkte des gegebenen Vierecks mit 4 verschiedenen

Buchstaben markieren. Sei nun die Aussage für konvexe $n-1-$Ecke bewiesen. Wir betrachten ein konvexes $n-$Eck mit einer beliebigen Triangulierung.
Lemma: Es existiert ein Eckpunkt des $n-$Ecks, von dem in der Triangulierung keine Diagonale ausgeht.
Beweis: Sei k die minimale Anzahl an Eckpunkten, die in der gegebenen Triangulierung zwischen 2 durch eine Diagonale verbundenen Eckpunkten liegen. Also gibt es eine Diagonale, die 2 Eckpunkte verbindet, zwischen denen k weitere Eckpunkte liegen. Das bedeutet, dass diese Diagonale das $n-$Eck in ein $k+2-$Eck und ein $n-k-$Eck aufteilt. Im $k+2-$Eck können aber jetzt keine weiteren Diagonalen sein, weil diese Punkte verbinden müssten, zwischen denen weniger als k weitere Eckpunkte liegen. Also muss das $k+2-$Eck ein Dreieck sein, also gilt $k=1$ und es gibt eine Diagonale, die 2 Punkte verbindet, zwischen denen nur ein weiterer Punkt liegt. Von diesen Punkt dazwischen kann also keine Diagonale ausgehen.
Wir können nun den gefundenen Eckpunkt vom $n-$Eck entfernen und erhalten ein $n-1-$Eck. In diesem können wir laut Induktionsvoraussetzung eine gültige Markierung der Eckpunkte finden. Nun fügen wir den entfernten Punkt wieder hinzu. Er ist nur in einem Viereck, das aus 2 benachbarten Dreiecken besteht, enthalten. Die anderen 3 Punkte in diesem Viereck sind auch in einem anderen Viereck enthalten (da das Dreieck aus diesen 3 Punkten an irgendein anderes Dreieck grenzen muss, da $n-1 \geq 4$) und sind daher mit 3 verschiedenen Buchstaben markiert. Also kann man den vierten Punkt mit dem fehlenden Buchstaben markieren und erhält eine gültige Markierung des $n-$Ecks.

Aufgabe 2.5. Die triangulierbaren Zahlen sind genau die durch 3 teilbaren Zahlen.
Wir stellen zuerst fest: Da für einen Eckpunkt A die Dreiecke, bei denen A ein Eckpunkt ist, abwechselnd schwarz und weiß sein müssen, muss in jedem Eckpunkt die Anzahl schwarzer Dreiecke um genau 1 größer sein als die Anzahl weißer Dreiecke. Außerdem muss jedes Dreieck, das eine Seite des $n-$Ecks als Seite hat, schwarz sein.
Wenn n durch drei teilbar ist, können wir per Induktion eine gültige Triangulierung konstruieren: Für $n=3$ färben wir einfach das gesamte Dreieck schwarz. Wenn wir nun ein gültige Triangulierung für n gefunden haben, können wir folgendermaßen eine gültige Triangulierung für $n+3$ finden: Seien A und E zwei benachbarte Eckpunkte des $n-$Ecks. Dann können wir dazwischen drei weitere Punkte B, C, D in dieser Reihenfolge einfügen. Im ursprünglichen $n-$Eck behalten wir die vorherige Triangulierung und Färbung bei. Außerdem verbinden wir die Punkte A und C sowie C und E. Die Dreiecke ABC und CDE färben wir schwarz und das Dreieck ACE weiß. Damit erhalten wir eine gültige Triangulierung im $n+3-$Eck.
Wenn n nicht durch 3 teilbar ist, nennen wir S die Anzahl an schwarzen Dreiecken und W die Anzahl an weißen Dreiecken. Dann ist $3S$ die Gesamtanzahl von Ecken von schwarzen Dreiecken (wobei gleiche Eckpunkte mehrfach gezählt werden) und $3W$ die Gesamtanzahl von Ecken von weißen Dreiecken. Jeder Eckpunkt zählt jetzt aber einmal öfters zu den Eckpunkten von schwarzen Dreiecken als zu den Eckpunkten von weißen Dreiecken, also gilt $3S-3W=n$. Daraus folgt, dass n durch 3

teilbar sein muss, falls eine gültige Triangulierung existiert.

Aufgabe 3.1. Sei G der Mittelpunkt der Seite BC und T der Schnittpunkt von BM und DG.

Da M und T die Mittelpunkte der Seiten CD und BC sind, muss T der Schwerpunkt des Dreiecks BCD sein.

Daraus folgt $|GT| : |DG| = 1 : 3$. Da das Dreieck ABC gleichschenklig ist, ist D der Mittelpunkt der Seite AB.

Daraus folgt, dass die Geraden DG und AC parallel sind, und $|CE| : |AC| = |TG| : |DG| = 1 : 3$.

Aufgabe 3.2. Sei P der Mittelpunk der Basis BC. Für die Dreiecke ABP und MBN gilt: $\angle BPA = 90^\circ = \angle BNM$, $\angle ABP = \angle MBN$ und $|AM| = |MB|$, daraus folgt, dass sie kongruent sind. Insbesondere haben sie die gleichen Flächeninhalte: $F_{ABP} = F_{MBN} = \frac{1}{2}FABC$.

Es folgt:

$$F_{ACMN} = F_{ABC} - F_{MBN} = F_{ABC} - \frac{1}{2}F_{ABC} = F_{MBN}.$$

Weiter haben wir durch Kongruenz:

$$|NB| + |BM| = |PB| + |BA| = \frac{1}{2}U_{ABC}$$

Daraus folgt:

$$U_{ACMN} = U_{ABC} - |NB| - |BM| + |MN| = \frac{1}{2}U_{ABC} + |MN| = |NB| + |BM| + |MN| = U_{MBN}.$$

Aufgabe 3.3. Sei E der Schnittpunkt der Symmetralen der Winkeln BAD und ADC, und F der Schnittpunkt der Symmetralen der Winkeln ABC und BCD. Die Punkte auf der Seite AE sind genauso weit entfernt von AB und AD, deswegen sind sie genauso wie Punkte auf BF, CF und DE schwarz.

Ähnlich sehen wir, dass alle Punkte innerhalb der Dreiecke AED und BCF blau sind. Alle anderen Punkte sind rot, da ihre nächste Seite entweder AB oder CD ist.

Die gesuchte Fläche ist

$$F = F_{ABCD} - F_{AED} - F_{BFC}.$$

Sei $|AE| = a$, dann folgt aus dem Satz von Pythagoras in AED, dass $a\sqrt{2} = 24$.

Deswegen sind $F_{AED} = F_{BCF} = \frac{a^2}{2} = 144$, und die gesuchte Fläche ist 576.

Aufgabe 3.4. Sei $x = |AX|$ und $y = |AY|$. Die Dreiecke AXY und BCX sind ähnlich: beide sind rechtwinkelig und $\angle AXY = \angle BCX$. Es folgt:

$$\frac{|BC|}{|BX|} = \frac{|AX|}{|AY|}$$

und $\frac{1}{1-x} = \frac{x}{y}$. Wir können die Fläche als eine Funktion in x ausdrücken:

$$F(CDY) = \frac{1}{2}(x^2 - x + 1).$$

Da $F(x)$ eine konvexe quadratische Gleichung mit der Nullstelle $\frac{1}{2}$ ist, erreicht F das Minimum in dem Punkt $x = \frac{1}{2}$. In diesem Fall ist X der Mittelpunkt der Seite AB.

Aufgabe 3.5.
Seien a, b und c die Längen der Seiten des Dreiecks, dabei sei c sei die Länge der Hypotenuse.

Da $a + b + c = 18$ ist, gilt $(a + b)^2 = (18 - c)^2 = 18^2 - 36c + c^2$.

Der Satz des Pythagoras besagt, dass $a^2 + b^2 = c^2$ gilt. Daraus folgt, dass $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$ ist. Wenn wir jetzt die beiden Gleichungen für $(a + b)^2$ zusammensetzen, bekommen wir $2ab = 18^2 - 36c$. Da die Fläche des Dreiecks $9 = \frac{ab}{2}$ ist, gilt: $18^2 - 36c = 2ab = 36$. Wir schließen, dass $c = 8$ ist.

Aufgabe 3.6. Sei O der Mittelpunkt der Seite PB. Da AT eine Tangente ist, gilt:

$$\angle ATP = 90 - \angle PTO = 90 - \angle TPO = 90 - \angle TPB = \angle TBP.$$

(Die erste Gleichung gilt, weil AT eine Tangente ist und PT der Durchmesser des Kreises ist. Die zweite Gleichung gilt weil OPT gleichschenklig ist, und die letzte gilt, weil BPT rechtwinklig ist.)

Die Dreiecke PAT und TAB sind ähnlich:

$$|\frac{PT}{BT}| = |\frac{AT}{AB}| = |\frac{AP}{AT}|$$

Daraus folgt, dass

$$|AT|^2 = |AB||AP| = 2$$

und $|AT| = \sqrt{2}$. Es folgt auch $|\frac{PT}{BT}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $|BT| = \sqrt{|PT|}$.

Mit dem Satz des Pythagoras im Dreieck PTB erhalten wir $|PT| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Aufgabe 3.7. Sei S_1 der Mittelpunkt des Kreises mit Radius r_1 und S_2 der Mittelpunkt des Kreises mit Radius r_2 und X der Schnittpunkt der Geraden AB und PQ.

Die Dreiecke AXS_1 und PXS_1 sind kongruent, da die Winkel $\angle S_1AX = 90 = \angle S_1PX$, $|S_1A| = |S_1P|$ übereinstimmen und sie die Seite XS_1 gemeinsam haben. Aus dieser Kongruenz folgt: $|AX| = |PX|$ und $\angle AXS_1 = \frac{1}{2}\angle AXP$.

Analog gilt $|BX| = |QX|$ und $\angle BS_2X = \frac{1}{2}\angle QS_2B$.

Weiters gilt:

$$16 = |AB| = |PX| + |QX| = 12 + 2|QX|$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass $|QX| = 2, |XB| = 2$ und $AX = 14$.

Da $\angle S_1AX = 90° = \angle XBS_2$:

$$\angle AXS_1 = \frac{1}{2}\angle AXP = \frac{1}{2}(180° - (360° - \angle XQS_2 - \angle QS_2B - \angle S_2BX)) = \frac{1}{2}\angle QS_2B = \angle BS_2X.$$

Da AXS_1 und BS_2X ähnlich sind, folgt:

$$\frac{r_1}{|AX|} = \frac{|XB|}{r_2}$$

und schließlich $r_1 \cdot r_2 = 2 \cdot 14 = 28$.

Aufgabe 3.8. Seien $A(a,\, 0)$, $B(b,\, 0)$ und $C(0,\, c)$ die Schnittpunkte der Funktion mit den Achsen. Dann sind a und b die Nullstellen der quadratischen Gleichung und es gilt einerseits $c = f(0) = q$ und andererseits nach Satz von Vieta $ab = q$.

Sei $D(0,\, d)$ der andere Schnittpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC mit der $y-$Achse.

Da einander AB und CD im Punkt $(0,\, 0)$ schneiden, folgt wegen der Potenz des Punktes bezüglich eines Kreises, dass

$$|OA| \cdot |OB| = |OC| \cdot |OD|.$$

Daraus folgt, dass $|ab| = |cd|$ (für $|OA| = |a|, |OB| = |b|, |OC| = |c|$ bzw. $|OD| = |d|$.)

Wir sehen, dass die Zahlen ab und cd immer das gleiche Vorzeichen haben, sie sind negativ wenn $(0,\, 0)$ innerhalb des Kreises ist, und positiv andernfalls.

Nun folgt aus $ab = cd$ und $ab = q = c$, dass $d = 1$ ist, was wir zeigen wollten.

Aufgabe 3.9.

Wir bezeichnen die Mittelpunkte der Kreise k_1 und k_2 mit O_1 bzw. O_2, und die Mittelpunkte der Strecken A_1B_1 und A_2B_2 mit M_1 bzw. M_2. Die Berührpunkte der Tangenten O_1A_1 und O_2A_2 mit den Kreisen k_2 bzw. k_1 seien mit C_1 bzw. C_2 bezeichnet. Weil die rechtwinkligen Dreiecke $O_1M_1A_1$ und $O_1C_2O_2$ ähnlich sind, gilt $|O_1A_1| : |M_1A_1| = |O_1O_2| : |C_2O_2|$, d.h. $\frac{1}{2}|A_1B_1| = \frac{r_1r_2}{d}$, wenn wir die Radien von k_1 und k_2 mit r_1 und r_2 und die Streckenlänge O_1O_2 mit d bezeichnen. Der Ausdruck $\frac{r_1r_2}{d}$ ist aber symmetrisch in Vertauschung von k_1 und k_2, also gilt auch $|A_2B_2| = \frac{r_1r_2}{d}$.

Aufgabe 3.10.
Zuerst wollen wir uns davon überzeugen, dass es unter den Dreiecken mit Flächeninhalt 1 ein Dreieck mit dem kleinsten Umfang gibt. Es ist einfacher, zu zeigen, dass es unter den Dreiecken mit Umfang 1 eines mit größtem Flächeninhalt gibt. Der Grund liegt darin, dass der Flächeninhalt *stetig* von den drei Seitenlängen a, b, c des Dreiecks abhängt, und durch die Bedingungen $a, b, c > 0$, $a + b + c = 1$ und zusätzlich die Dreiecksungleichungen $a+b \geq c$, $a+c \geq b$ und $b+c \geq a$ die Menge der möglichen Seitenlängen *abgeschlossen* (durch Ungleichungen mit "$\geq$" festgelegten) und *beschränkt* ist. Ein Satz der Topologie besagt nun, dass es ein Tripel von Seitenlängen gibt, das den maximalen Flächeninhalt F_{max} realisiert. Dividiert man die Seitenlängen nun durch $\sqrt{F_{max}}$, so erhält man ein Dreieck mit Flächeninhalt 1, welches offensichtlich den kleinstmöglichen Umfang hat.

Nehmen wir nun an, das Dreieck mit dem kleinsten Umfang - welches nun zweifelsfrei existiert - wäre nicht gleichseitig. Dann gäbe es zwei Seiten, die nicht gleich lang sind, o.B.d.A gelte $a < b$. Der Höhenfußpunkt von C auf AB sei mit F bezeichnet, die Höhe CF mit h, und der Abstand zwischen F und dem Mittelpunkt von AB mit x. Dann gilt nach Pythagoras $a = \sqrt{(\frac{c}{2} - x)^2 + h^2}$, und $a = \sqrt{(\frac{c}{2} + x)^2 + h^2}$. Wir zeigen nun, dass $a+b > 2\sqrt{(\frac{c}{2})^2 + h^2}$ gilt, dass der Umfang also kürzer wird, wenn man C auf die Streckensymmetrale von AB setzt:

$$
\begin{aligned}
a+b=&\sqrt{\left(\frac{c}{2}-x\right)^2+h^2}+\sqrt{\left(\frac{c}{2}+x\right)^2+h^2}>2\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+h^2}\\
&\Leftrightarrow\left(\frac{c}{2}-x\right)^2+h^2+\left(\frac{c}{2}+x\right)^2+h^2+2\sqrt{\ldots}\sqrt{\ldots}>4\left(\left(\frac{c}{2}\right)^2+h^2\right)\\
&\Leftrightarrow 2\left(\frac{c}{2}\right)^2+2x^2+2h^2+2\sqrt{\ldots}\sqrt{\ldots}>4\left(\left(\frac{c}{2}\right)^2+h^2\right)\\
&\Leftrightarrow 2\sqrt{\ldots}\sqrt{\ldots}>2\left(\left(\frac{c}{2}\right)^2-x^2+h^2\right)\ \Leftrightarrow\ \left(\left(\frac{c}{2}-x\right)^2+h^2\right)\left(\left(\frac{c}{2}+x\right)^2+h^2\right)>\left(\left(\frac{c}{2}\right)^2-x^2+h^2\right)^2\\
&\Leftrightarrow\left(\left(\frac{c}{2}\right)^2-cx+x^2+h^2\right)\left(\left(\frac{c}{2}\right)^2+cx+x^2+h^2\right)>\left(\left(\frac{c}{2}\right)^2-x^2+h^2\right)^2\\
&\Leftrightarrow\ \left(\left(\frac{c}{2}\right)^2+x^2+h^2\right)^2-c^2x^2>\left(\left(\frac{c}{2}\right)^2-x^2+h^2\right)^2\\
&\Leftrightarrow\left(\left(\frac{c}{2}\right)^2+x^2+h^2\right)^2-\left(\left(\frac{c}{2}\right)^2-x^2+h^2\right)>c^2x^2\\
&\Leftrightarrow 4\left(\left(\frac{c}{2}\right)^2+h^2\right)x^2>c^2x^2\ \Leftrightarrow\ (c^2+4h^2)x^2>c^2x^2,
\end{aligned}
$$

womit die zu zeigende Ungleichung auf eine äquivalente und offensichtlich wahre zurückgeführt wurde. Das ist ein Widerspruch zu unserer Annahme, das Dreieck hätte minimalen Umfang. Damit muss das Dreieck mit minimalem Umfang gleichseitig sein.

Aufgabe 3.11.

Wie bei Aufgabe 1 gibt es ein solches Dreieck, da der Umfang *stetig* von der Lage der Punkte P, Q und R abhängt, und die Menge der möglichen Punktetripel (P,Q,R) *abgeschlossen* und *beschränkt* ist, sofern wir zulassen, dass die Punkte mit den Eckpunkten von ABC zusammenfallen.

Wir zeigen nun, dass PQR genau dann den minimalen Umfang hat, wenn P, Q und R die Höhenfußpunkte von A, B bzw. C auf die jeweils gegenüberliegenden Seiten sind. Zunächst spiegeln wir den Punkt P an AB und AC, und bezeichnen die beiden Bildpunkte mit P_B bzw. P_C. Dann gilt $|PQ|=|P_CQ|$ und $|PR|=|RP_B|$, und damit $|PQ|+|QR|+|RP|=|P_CQ|+|QR|+|RP_B|$. Nach der Dreiecksungleichung gilt aber $|P_CQ|+|QR|+|RP_B|\geq|P_CP_B|$, mit Gleichheit genau dann, wenn P_C, Q, R und P_B in dieser Reihenfolge auf einer Geraden liegen. Weil ABC spitzwinklig ist, ist das möglich, und damit müssen Q, R bereits auf der Geraden P_CP_B liegen, da wir ja das Dreieck PQR mit dem minimalen Umfang betrachten. Es gilt also nun, den Punkt P so zu wählen, dass die Länge $|P_CP_B|$ minimal wird. Betrachte nun das Dreieck P_CAP_B. Es ist gleichschenklig, da $|P_CA|=|PA|=|P_BA|$ nach Konstruktion gilt, mit Scheitelwinkel $\angle P_BAP_C=2\angle BAP+2\angle PAC=2\alpha$, und damit bis auf Ähnlichkeit bestimmt! Das Verhältnis $|P_CP_B|:|P_CA|=|P_CP_B|:|PA|$ ist somit unabhängig von der Wahl des Punktes P. Daher ist $|P_C P_B|$ genau dann minimal, wenn es der Abstand $|AP|$ ist, also wenn P der Höhenfußpunkt von A auf BC ist. Durch zyklisches Vertauschen der Punkte im vorangehenden Argument erhält man natürlich, dass Q der Höhenfußpunkt von B auf AC ist, und dass R der Höhenfußpunkt von C auf AB ist.

Aufgabe 3.12.
Wir setzen auf den Seiten AB und AC jeweils gleichseitige Dreiecke nach außen auf, deren dritte Eckpunkte wir mit B' bzw. C' bezeichnen, sodass B' das Bild des Punktes B unter Drehung um $60°$ in A *im Uhrzeigersinn* und C' das Bild unter Drehung um $60°$ in A *gegen den Uhrzeigersinn* ist. Es sei nun P ein beliebiger Punkt im Inneren des Dreiecks ABC. Drehen wir P um $60°$ gegen den Uhrzeigersinn, erhalten wir einen Punkt P', sodass $AP'P$ ein gleichseitiges Dreieck ist, da ja $|AP| = |AP'|$ gilt, und $\angle P'AP = 60°$. Wegen $|P'P| = |AP|$ und $|B'P'| = |BP|$ ist die Länge des Streckenzugs $|CP| + |PP'| + |P'B'|$ von C nach B' genau die Summe $|AP| + |BP| + |CP|$. Damit ist die Summe nach der Dreiecksungleichung nach unten durch die Länge $|CB'|$ beschränkt, die nicht von der Wahl des Punktes P abhängt. Gleichheit tritt genau dann ein, wenn C, P, P' und B' in genau dieser Reihenfolge auf einer Geraden liegen.

Wir zeigen nun, dass das dann der Fall ist, wenn wir P als den Schnittpunkt F der Geraden BC' und CB' wählen, welcher im Inneren von ABC liegt, weil jeder Innenwinkel kleiner als $120°$ ist. Da durch Drehung um $60°$ in A im Uhrzeigersinn B in B' und C' in C übergeht, wird BC' auf $B'C$ abgebildet. Der Punkt P' liegt daher auf $B'C$, weil sein Urbild P auf BC' gelegen ist! Damit liegen C, P, P' und B' auf einer Geraden. Weil $\angle PAC < \angle PAC + 60° = \angle P'AC \leq \angle BAC + 60° = \angle B'AC \leq 120° + 60° = 180°$ gilt, liegen C, P, P' und B' auch genau in dieser Reihenfolge auf der Strecke CB', womit gezeigt wurde, dass $|FA| + |FB| + |FC|$ genau das erreichbare Minimum $|CB'|$ annimmt.

Aufgabe 3.13.
Die Eckpunkte des Quadrats, die wir mit $ABCD$ bezeichnen, teilen den Kreis in vier Viertelkreisbögen ein. Weil die Seitenlängen des Dreiecks länger als die des Quadrats sind, liegen niemals zwei Dreieckseckpunkte auf demselben Viertelkreisbogen. O.B.d.A. nehmen wir an, dass die Eckpunkte P, Q und R des Dreiecks auf den Viertelkreisbögen CD, DA bzw. BC liegen. Der zu untersuchende Flächeninhalt des Siebenecks $ABRCPDQ$ ist dann durch die Summe der Flächeninhalte des Quadrats $ABCD$ und der Dreiecke BRC, CPD und DQA gegeben, und wird daher maximal bzw. minimal genau dann, wenn es die Summe der Dreiecksflächen ist. Weil die Grundlinien der Dreiecke BC, CD und DA gleich lang sind, ist die Summe ihrer Flächeninhalte direkt proportional zur Summe ihrer Höhen.

Wir zeigen nun, dass der Abstand h_P von P zu DC genau dann maximal bzw. minimal wird, wenn die Summe der Abstände $h_Q + h_R$ der Abstände von Q bzw. R zu AD bzw. BC ihr Maximum bzw.

Minimum annimmt. Betrachtet man die Länge h der Normalprojektion von QR auf die Gerade AB, so erkennen wir $h - AB = h_Q + h_R$. Da $|QR|$ konstant ist, wird die Länge h wird minimal, wenn QR den größtmöglichen Winkel zu AB einschließt, was unter unseren Annahmen an die Lage der Punkte genau dann passiert, wenn $Q = A$ oder $R = B$ eintritt. Glücklicherweise ist dann auch der Punkt P so nahe an einem der Eckpunkte D, C wie möglich, und damit auch der Abstand h_P minimal. Ganz ähnlich wird die Länge h, und damit die Summe $h_Q + h_R$, maximal, wenn QR parallel zu AB ist, was zur Folge hat, dass A in der Mitte des Kreisbogens DC liegt, und somit auch h_P maximal wird.

Zusammengefasst wird der kleinstmögliche Flächeninhalt des Siebenecks erreicht, wenn ein Eckpunkt des Dreiecks mit einem des Quadrats zusammenfällt, und der größtmögliche, wenn einer der Dreieckseckpunkte auf der Streckensymmetrale einer der Quadratseiten liegt.

Aufgabe 3.14.
Es sei F_A der Höhenfußpunkt von A auf BC. Dann bilden ABF_A und CAF_A jeweils rechtwinklige Dreiecke, mit rechtem Winkel in F_A. Der Innenwinkel des Dreiecks ABF_A in B ist entweder β oder $180° - \beta$, je nachdem, ob β stumpf ist. Nach der Definition des Sinus über rechtwinklige Dreiecke ist nun h_A, die Länge der Höhe in A auf BC, gegeben durch $\sin(\beta) \cdot c$ oder $\sin(180° - \beta) \cdot c$, aber letzterer Ausdruck ist ebenfalls $\sin(\beta) \cdot c$, da $\sin(x) = \sin(180° - x)$ gilt. Im Dreieck CAF_A berechnen wir auf dieselbe Weise $h_A = \sin(\gamma) \cdot b$, und erhalten

$$\sin(\beta) \cdot c = h_A = \sin(\gamma) \cdot b \qquad \Rightarrow \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}.$$

Durch die gewohnte zyklische Vertauschung der Eckpunkte erhalten wir analog $\frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{a}$, und damit insgesamt den Sinussatz.

Für den Cosinussatz bezeichnen wir die (gerichteten) Längen BF_A und F_AC mit x bzw. y, sodass $x + y = BC = a$ gilt. Nach Pythagoras gilt $c^2 = x^2 + h_A^2$ und $h_A^2 = b^2 - y^2$, also $c^2 = b^2 + x^2 - y^2 = b^2 + (x - y)(x + y) = b^2 + a(a - 2y)$. Da aber $y = b\cos(\gamma)$ gilt (man überzeuge sich davon, dass das Vorzeichen auch für stumpfes γ stimmt), folgt $c^2 = b^2 + a^2 - 2ay = b^2 + a^2 - 2ab\cos(\gamma)$, und damit der Cosinussatz.

Aufgabe 3.15.
Nach dem Sinussatz im Dreieck BTC gilt $|BT| : |TC| = \sin(\angle BCT) : \sin(\angle TBC)$. Wegen $\angle TBC = 180° - \angle CBA$ und $\sin(x) = \sin(180° - x)$ sowie dem Tangentenwinkelsatz $\angle BCT = \angle BAC$ können wir weiter $\sin(\angle BCT) : \sin(\angle TBC) = \sin(\angle BAC) : \sin(\angle CBA)$ schreiben. Nach dem Sinussatz im Dreieck ABC folgt $\sin(\angle BAC) : \sin(\angle CBA) = |BC| : |CA|$, und damit insgesamt $|BT| : |TC| = |BC| : |CA|$.

Aufgabe 3.16.
Zunächst bestimmen wir das Verhältnis $\sin(\angle BAM) : \sin(\angle MAC)$: Nach dem Sinussatz gilt $\sin(\angle BAM) : \sin(\angle AMB) = |BM| : |AB|$ und $\sin(\angle MAC) : \sin(\angle CMA) = |CM| : |CA|$, aber weil $|BM| = |CM|$ und $\sin(\angle AMB) = \sin(\angle CMA)$, folgt $\sin(\angle BAM) : \sin(\angle MAC) = |CA| : |AB|$. Mit dem Peripheriewinkelsatz über den Sehnen BD bzw. DC erhalten wir nun $\angle BAM = \angle BCD$ und $\angle MAC = \angle DBC$. Eine Anwendung des Sinussatzes im Dreieck BDC ergibt nun $|BD| : |DC| = \sin(\angle BCD) : \sin(\angle DBC) = \sin(\angle BAM) : \sin(\angle MAC) = |CA| : |AB|$, womit (1) bewiesen ist.

Für Verhältnis (2) benutzen wir den Sinussatz in den Dreiecken ABT und ATC, um $|BT| : |BA| = \sin(\angle BAT) : \sin(\angle ATB)$ und $|TC| : |AC| = \sin(\angle TAC) : \sin(\angle CTA)$ zu erhalten. Daraus folgt, weil $\angle BAT = \angle TAC$ und, wie vorhin, $\sin(\angle ATB) = \sin(\angle CTA)$ gilt, durch Gleichsetzen und elementares Umformen die Aussage $|BT| : |TC| = |BA| : |AC|$.

Da AE das Spiegelbild der Geraden AM an der Winkelsymmetralen ist, gilt $\angle BAE = \angle MAC$ und $\angle EAC = \angle BAM$, und damit $\sin(\angle BAE) : \sin(\angle EAC) = \sin(\angle MAC) : \sin(\angle BAM) = |BA| : |AC|$, wie im Zuge des Beweises von (1) gezeigt wurde. Mit dem Sinussatz in den Dreiecken ABE und AEC erhalten wir, ähnlich wie vorher, $|BE| : |BA| = \sin(\angle BAE) : \sin(\angle AEB)$ und $|AC| : |EC| = \sin(\angle CEA) : \sin(\angle EAC)$. Multiplizieren der beiden Gleichungen ergibt

$$\frac{|BE|}{|EC|} \cdot \frac{|AC|}{|BA|} = \frac{\sin(\angle BAE)}{\sin(\angle EAC)} \cdot \frac{\sin(\angle CEA)}{\sin(\angle AEB)} = \frac{\sin(\angle BAE)}{\sin(\angle EAC)} = \frac{|BA|}{|AC|} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{|BE|}{|EC|} = \left(\frac{|BA|}{|AC|}\right)^2.$$

Aufgabe 3.17.
Der erste Teil der Aufgabe, $\sin(\angle BAM) : \sin(\angle MAC) = |AC| : |AB|$, wurde bereits im Zuge des Beweises für Teil (1) von Aufgabe 3.16 gezeigt.

Da $\angle BAM$ ein Peripheriewinkel über der Sehne BD im Umkreis des Dreiecks ABC ist, gilt $2R \cdot \sin(\angle BAM) = |BD|$, wobei R den Radius des Umkreises bezeichne. (Der einfachste Weg, das zu sehen, ist, einen Punkt X so am Umkreis einzuzeichnen, dass BX ein Durchmesser ist - dann ist BDX ein rechtwinkliges Dreieck mit Innenwinkel $\angle BAM$, Hypotenuse BX und Gegenkathete BD). Analog gilt $2R \cdot \sin(\angle MAC) = |CD|$. Gleichsetzen ergibt $|AB| : |AC| = \sin(\angle MAC) : \sin(\angle BAM) = |DC| : |BD|$, woraus durch elementares Umformen die zweite Behauptung folgt.

Aufgabe 3.18.
Wir benutzen die Aussage aus Aufgabe 3.15, und erhalten $|DT| : |TB| = |DB| : |BA|$ sowie $|DT| : |TC| = |DC| : |CA|$, und da $|TB| = |TC|$, folgt $|DB| : |BA| = |DC| : |CA|$, womit die erste Aussage gezeigt ist.

Nun spiegeln wir D an der Streckensymmetrale von BC und erhalten einen weiteren Punkt D' am Umkreis. Für diesen Punkt gilt $|AB| \cdot |BD'| = |AC| \cdot |CD'|$. Da das Verhältnis $|BD'| : |D'C|$ zusammen mit der Tatsache, dass D' genauso wie D auf dem Umkreisbogen BC liegt, der A nicht enthält, den Punkt D' schon eindeutig bestimmt, muss D' nach Beispiel 8 der zweite Schnittpunkt der Schwerlinie durch A mit dem Umkreis sein.

Die Bedingung $|AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |BD|$ ist symmetrisch bezüglich Vertauschung von AD und BC, und damit muss es sich bei der Linie BC auch um die Spiegelung der Schwerlinie BN des Dreiecks ABD an der Winkelsymmetrale von $\angle DBA$ handeln. Wir folgern

$$\angle NBA = \angle DBC = \angle DAC = \angle NAC, \qquad \angle ACN = \angle BCD = \angle BAD = \angle BAN,$$

womit die Dreieck BAN und ACN ähnlich sind, da sie in zwei Winkeln übereinstimmen.

Aufgabe 3.19.
Es sei O der Mittelpunkt des Einheitskreises k, und C der Schnittpunkt der positiven x-Achse mit k. Der Punkt A liege so auf k, dass $\angle COA = \alpha$, und der Punkt B liege so auf k, dass $\angle BOC = \beta$, also insgesamt $\angle BOA = \alpha + \beta$ gilt.

Nach der Sinus-Flächenformel ist der Flächeninhalt des Dreiecks AOB durch $[AOB] = \frac{1}{2}|OA| \cdot |OB| \cdot \sin(\angle BOA) = \frac{1}{2} 1 \cdot 1 \cdot \sin(\angle BOA) = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta)$ gegeben. Es muss also dieser Flächeninhalt berechnet werden. Dazu bezeichnen wir die Höhenfußpunkte von A und B auf OC mit E bzw. F, und den Schnittpunkt von AB mit X. Nach dem Strahlensatz gilt $|XE| : |XA| = |XF| : |XB|$, und damit folgt $[AXF] = \frac{1}{2}|XE| \cdot |XB| \cdot \sin(\angle EXB) = \frac{1}{2}|XF| \cdot |XA| \cdot \sin(\angle FXA) = [XEB]$. Die Dreiecke AXF und XEB sind also flächengleich. Die Höhen $|EA|$ und $|FB|$ sind durch $\sin(\alpha)$ bzw. $\sin(\beta)$ gegeben, und die Streckenlängen $|OF|$ bzw. $|OE|$ durch $\cos(\beta)$ bzw. $\cos(\alpha)$. Mit der gewöhnlichen Flächeninhaltsformel erhalten wir $[EOB] = \frac{1}{2}|OE| \cdot |FB| = \frac{1}{2}\cos(\alpha)\sin(\beta)$ und $[AOF] = \frac{1}{2}|OF| \cdot |EA| = \frac{1}{2}\cos(\beta)\sin(\alpha)$. Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= 2[AOB] = 2\left([AOX] + [XOB]\right) \\ &= 2\left([AOF] - [AXF] + [EOB] + [XEB]\right) = \cos(\alpha)\sin(\beta) + \cos(\beta)\sin(\alpha). \end{aligned}$$

Aufgabe 3.20.
Es seien D und E die Höhenfußpunkte von A auf die Innen- bzw. Außenwinkelsymmetrale von $\beta := \angle CBA$, und X und Y die Höhenfußpunkte von D bzw. E auf BC. Wir berechnen nun den Normalabstand dieser Punkte zur Geraden BC. Da die Dreiecke BDA und BXD rechtwinklig sind, gilt $|BD| = \cos(\frac{\beta}{2})|BA|$ und $|XD| = \sin(\frac{\beta}{2})|BD| = \sin(\frac{\beta}{2})\sin(\frac{\beta}{2})|BA|$. Mit dem Summensatz für den Sinus erhalten wir $|XD| = \frac{1}{2}\sin(\beta)|BA|$, was genau der halben Höhe von A auf

BC entspricht. Weil $\angle DBE = \angle ADB = \angle BEA = 90°$ gilt, ist $BDAE$ ein Rechteck, und damit $\angle EDB = \angle DBA = \angle CBD$. Nach dem Z-Winkel-Satz ist die Gerade DE daher parallel zu BC, und somit auch der Normalabstand von E auf BC genau die halbe Höhe von A auf BC. Durch Austauschen der Punkte B und C im vorhergehenden Argument erhalten wir, dass auch die Höhenfußpunkte von A auf die zwei Winkelsymmetralen durch C denselben Normalabstand zur Geraden BC haben, und damit liegen alle vier Punkte auf einer gemeinsamen Geraden.

Aufgabe 3.21.
Offensichtlich haben der Inkreis des Quadrats $ABCD$ und der Umkreis des kleineren Quadrats, welches wir mit $PQRS$ bezeichnen wollen, denselben Mittelpunkt. Damit muss nur gezeigt werden, dass ihr Radius gleich ist. Bezeichnen wir das Verhältnis der Seitenlängen der beiden Quadrate mit λ, sowie Umkreis- und Inkreisradius von $ABCD$ mit R bzw. r. Der Umkreis von $PQRS$ hat Radius λR, und damit ist noch zu zeigen, dass $\lambda = r : R$ gilt. Im rechtwinkligen Dreieck ABP ist $|AB|$ die Hypotenuse, und $|AP|$ die Ankathete des Winkels $\angle BAP$, also gilt $|AP| = \cos(15°)|AB|$. Aus Symmetriegründen gilt $|AS| = |BP| = \sin(15°)|AB|$, und wir erhalten $\lambda = |SP| : |AB| = \cos(15°) - \sin(15°)$. Das Verhältnis $r : R$ von In- und Umkreisradius eines Quadrates ist $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(45°) = \cos(45°)$. Mit der Summenformel für den Sinus erhalten wir $\lambda \cos(45°) = \sin(45°)\cos(15°) - \cos(45°)\sin(15°) = \sin(45° - 15°) = \sin(30°) = \frac{1}{2}$. Es gilt daher $\lambda = \frac{1}{2\cos(45°)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = r : R$.

Aufgabe 3.22.
Die Konfiguration in diesem Beispiel ist tatsächlich ident mit der in Aufgabe 3.18, nur, wie oft in der Geometrie, aus einem etwas anderem Blickwinkel betrachtet. Nach den Umbenennungen $A \leftrightarrow A$, $Q \leftrightarrow B$, $P \leftrightarrow C$, $T \leftrightarrow T$ und $M \leftrightarrow N$ sind wir genau in der Situation von Aufgabe 3.18, wo bewiesen wurde, dass die Dreiecke ABN und CAN ähnlich sind, und damit insbesondere die Winkel $\angle CNA$ und $\angle ANB$ gleich sind - aber diese sind einfach die umbenannten Winkel $\angle PMA$ und $\angle AMQ$.

Aufgabe 3.23: Wir sehen, dass $AMTL$ ein Sehnenviereck ist, und AT ist der Durchmesser seines Kreises:

$$d = |LM| = |AT|\sin(\alpha) = 56\sin(\alpha).$$

Analog gilt: $d = 40\sin(\alpha) = 35\sin(\alpha)$ Aus dem Sinussatz folgt

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{40}{56}.$$

Analog folgt $\frac{c}{b} = \frac{7}{8}$. Aus dem Cosinussatz folgt:

$$1 = \frac{c}{b}^2 + \frac{a}{b}^2 - 2\frac{c}{b} \cdot \frac{a}{b}\cos(\beta).$$

Wir setzen die Werte ein und erhalten $\cos(\beta) = \frac{1}{2}$, also muss $\beta = 60°$ sein.

Aufgabe 4.1. Wir sehen, dass $2187 = 3^7$. Wir beweisen die folgende Behauptung mittels vollständiger Induktion:

Induktionsannahme: Die Zahl, die aus 3^n-Mal der Ziffer 1 besteht, ist durch 3^n teilbar.

Induktionsbasis: Für $n = 1$ gilt die Behauptung, da $111 = 3 \cdot 37$

Induktionsschluss: Wir nehmen an, dass die Behauptung gilt, d.h. $1111\dots11$ bestehend aus 3^n Ziffern ist durch 3^n teilbar.

Wir wollen beweisen, dass die Aussage nun auch für $n + 1$ gilt.

Es gilt:

$$111\dots11 = \underbrace{111\dots11}_{3^n \text{ mal } 1} \cdot 1000\dots010\dots01$$

Der erste Faktor ist wegen der Annahme durch 3^n teilbar, und die Ziffernsumme des zweiten Faktors ist gleich 3, d.h. der zweite Faktor ist auch durch 3 teilbar.

Nach vollständiger Induktion gilt die Behauptung demnach für jedes $n \geq 1$.

Aufgabe 4.2. Wir gruppieren die Teiler von n in Paare, deren Produkte gleich n sind. O.b.d.A. gelte

$$1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_m = n.$$

Wir erhalten folgende Gleichungen:

$$d_1 \cdot d_m = n, \quad d_2 \cdot d_{m-1} = n, \quad \ldots \quad d_m \cdot d_1 = n$$

Multiplikation wir all diese Gleichungen miteinander, so erhalten wir:

$$d_1^2 \cdot d_2^2 \cdots d_m^2 = n^m$$

Daraus folgt

$$2\sum_{k=1}^{m} \log(d_k) = 2\log(d_1 \cdot d_2 \cdots d_m) = \log(d_1^2 \cdot d_2^2 \cdots d_m^2) = \log(n^m)$$

Aufgabe 4.3. Zunächst ist $\frac{3x+(k+1)}{k}$ genau dann gekürzt, wenn $\frac{3x+1}{k}$ gekürzt ist, da

$$\frac{3x + (k + 1)}{k} = \frac{3x + 1}{k} + 1$$

gilt. Wir suchen als eine möglichst kleine positive ganze Zahl x sodass $3x + 1$ zu den Zahlen 8, 9, 10, $\dots$, 47 und 48 teilerfremd ist. Somit enthält $3x + 1$ keinen der Primteiler 2, 3, 5, $\dots$, 43 und 47. Demnach muss $3x + 1$ einer der nächsten Primzahlen sein, die gleichzeitig bei Division durch 3 einen Rest von 1 ergeben. Das führt zur Primzahl 61 und somit zur Lösung $x = 20$.

Aufgabe 4.4. Wir betrachten Zahlen der Gestalt

$$A_n := \underbrace{1234567890\dots1234567890}_{n\text{ - mal}} = 1234567890 \cdot (1 + 10^{10} + 10^{20} + \dots + 10^{10(n-1)}).$$

Es gilt $2005 = 5 \cdot 401$ und offensichtlich ist jedes A_n bereits durch 5 teilbar. Es bleibt daher zu zeigen, dass es unendlich viele n gibt, sodass A_n durch 401 teilbar ist.

Da die Folge $(A_0, A_1, A_2, ...)$ unendlich lang ist, gibt es unendlich viele A_i die in der selben Restklasse modulo 401 liegen. Wir betrachten ab jetzt nur noch solche A_i, die in dieser Restklasse liegen.

Sei A_m die kleinste solche Zahl und A_j eine weitere. Da die beiden in der selben Restklasse mod 401 liegen, ist $A_j - A_m$ durch 401 teilbar. Des weiteren ist $A_j - A_m$ von der Gestalt

$$1234567890\dots1234567890000\dots0.$$

Lässt man alle bis auf den letzten Nuller weg, erhält man eine Zahl, die immer noch durch 401 teilbar ist, ebenso durch 5 da sie auf eine Null endet und jede Ziffer gleich oft benutzt. Da solche Zahlen für unendlich viele A_j in der Restklasse von A_m finden kann, erhält man unendlich viele Zahlen mit der gewünschten Eigenschaft.

Aufgabe 4.5. Zunächst, sei (a, b, c) und d eine positive ganze Zahl. Dann gilt

$$\begin{aligned} a + b + c &= \mathrm{kgV}(a, b, c) \\ \Leftrightarrow ad + bd + cd &= d \cdot \mathrm{kgV}(a, b, c) = \mathrm{kgV}(ad, bd, cd). \end{aligned}$$

Somit ist (ad, bd, cd) genau dann eine Lösung, wenn (a, b, c) eine Lösung ist. Sei deshalb o.B.d.A. $\mathrm{ggT}(a, b, c) = 1$.

Es gilt weiter, dass a, b, c paarweise teilerfremd sind, also

$$\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(a, c) = \mathrm{ggT}(b, c) = 1.$$

(Sei k ein Teiler von 2 der Zahlen a, b, c, dann teilt k auch $\mathrm{kgV}(a, b, c)$ und wegen $a + b + c = \mathrm{kgV}(a, b, c)$ auch die dritte Zahl. Ein Widerspruch zu $\mathrm{ggT}(a, b, c) = 1$.) Somit gilt ebenfalls

$$\mathrm{kgV}(a, b, c) = abc$$

Sei weiters o.B.d.A. $a \leq b \leq c$. Es können nicht alle Zahlen gleich groß sein (also $a = b = c$), da sonst

$$3a = a + a + a \neq \mathrm{kgV}(a, a, a) = a.$$

Deshalb gilt $a+b+c < 3c$. Da $a+b+c =$kgV(a, b, c) gleichzeitig ein Vielfaches von c ist, muss gelten

$$\mathrm{kgV}(a, b, c) = 2c$$

(kgV$(a, b, c) = c$ ist nicht möglich, da sonst $a + b = 0$ gilt.) Aus kgV$(a, b, c) = 2c$ folgt weiter

$$abc = \mathrm{kgV}(a, b, c) = 2c \Rightarrow ab = 2$$

und da $a \leq b$ gilt $a = 1$ und $b = 2$. Letztendlich folgt aus

$$a + b + c = \mathrm{kgV}(a, b, c) = 2c \Rightarrow a + b = c$$

dass $c = 3$ gilt. Wir erhalten somit die Lösungsmenge

$$\{(d, 2d, 3d), (d, 3d, 2d), (2d, d, 3d), (2d, 3d, d), (3d, d, 2d), (3d, 2d, d) \mid d \in \mathbb{Z}^+\}.$$

Aufgabe 4.6. Wir zeigen zuerst die Teilbarkeit durch 3 und anschließend durch 8, wodurch die Behauptung folgt.

- Teilbarkeit durch 3: Zunächst, wenn $3|n$ dann folgt bereits $3|n^n - n$. Andererseits, wenn $3 \nmid n$ dann ist n^{n-1} eine nicht durch 3 teilbare Quadratzahl (da der Exponent gerade ist) und damit kongruent 1 modulo 3. Somit gilt
$$3|n^{n-1} - 1 \Rightarrow 3|n^n - n = n(n^{n-1} - 1).$$
- Teilbarkeit durch 8: n^{n-1} ist eine ungerade Quadratzahl und dadurch kongruent 1 modulo 8. Deshalb gilt
$$8|n^{n-1} - 1 \Rightarrow 8|n^n - n = n(n^{n-1} - 1).$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 4.7. Es gilt

$$\begin{aligned}
&7|(a_n\, a_{n-1}\ \ldots\ a_0)_{10}\\
\Leftrightarrow\ &7|(a_n\, a_{n-1}\ \ldots\ a_1)_{10}\cdot 10 + a_0\\
\Leftrightarrow\ &7|(a_n\, a_{n-1}\ \ldots\ a_1)_{10}\cdot 50 + 5a_0\\
\Leftrightarrow\ &7|(a_n\, a_{n-1}\ \ldots\ a_1)_{10}\cdot (49+1) + 5a_0\\
\Leftrightarrow\ &7|(a_n\, a_{n-1}\ \ldots\ a_1)_{10} + 5a_0.
\end{aligned}$$

Damit ist diese Teibarkeitsregel durch 7 gezeigt.

Aufgabe 4.8. Man erhält

$$\begin{aligned}
A_0 &= \{1,\, 2\}\\
A_1 &= \{1,\, 2,\, 3\}\\
A_2 &= \{1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5\}\\
A_3 &= \{1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5,\, 6,\, 7,\, 8,\, 9\}.
\end{aligned}$$

Dadurch stellt man die Vermutung auf: $A_n = \{1,\, 2,\, 3,\, \ldots,\, 2^n+1\}$. Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsschritt: $n \to n+1$. Sei, nach Induktionsvoraussetzung, $A_n = \{1,\, 2,\, 3,\, \ldots,\, 2^n+1\}$. Dann enthält A_{n+1} die Zahlen $2^n+2,\, 2^n+3,\, \ldots,\, 2^{n+1}+1$, da diese als Summe von 2 verschiedenen Zahlen aus A_n geschrieben werden können:

$$\begin{aligned}
2^n+2 &= (2^n+1)+1\\
2^n+3 &= (2^n+1)+2\\
&\ldots\\
2^{n+1}+1 &= (2^n+1)+2^n.
\end{aligned}$$

Weiters enthält A_{n+1} die Zahlen von A_n und kann keine Zahl größer als $2^{n+1}+1$ beinhalten. Somit gilt tatsächlich $A_{n+1} = \{1,\, 2,\, \ldots,\, 2^{n+1}+1\}$ womit der Induktionsschritt gezeigt ist.

Letztendlich gilt $a_n = |A_n| = 2^n + 1$.

Aufgabe 4.9. Wir suchen also positive ganze Zahlen n für die es $a, b \in \mathbb{Z}$ gibt mit

$$n = a^2 - b^2.$$

Probieren wir zunächst $b = a - 1$. Man erhält

$$n = a^2 - (a-1)^2 = a^2 - (a^2 - 2a + 1) = 2a - 1.$$

Somit lässt sich jede ungerade Zahl als Differenz darstellen. Weiters probieren wir $b = a - 2$:

$$n = a^2 - (a-2)^2 = a^2 - (a^2 - 4a + 4) = 4a - 4.$$

Dadurch ist es möglich jedes Vielfaches von 4 als Differenz von zwei Quadratzahlen zu schreiben.

Wir beweisen nun, dass keine weiteren Zahlen n in dieser Form geschrieben werden können. Somit gilt es zu zeigen, dass

$$n = a^2 - b^2$$

keine Lösung besitzt, wenn $n \equiv 2 \pmod 4$ ist. Tatsächlich gilt $a^2, b^2 \in \{0, 1\} \pmod 4$, wodurch sich die Restklasse $2 \pmod 4$ tatsächlich nicht als Differenz schreiben lässt.

Die Lösungsmenge ist demnach $\{n \in \mathbb{N} \colon 4 \nmid n\}$.

Aufgabe 4.10. Die Summe lässt sich vereinfachen zu

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \cdot k^2}{k+1} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \cdot (k^2 - 1)}{k+1} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \cdot (k-1) + \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1}.\end{aligned}$$

Somit ist der Ausdruck genau dann ganzzahlig, wenn

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \ldots + \frac{1}{2n+1}$$

eine ganze Zahl ist. Wir wollen im nächsten Schritt zeigen, dass dieser Ausdruck für jedes n zwischen -1 und 0 liegt und somit nicht ganzzahlig sein kann. Durch geeignetes Zusammenfassen erhält man

$$\underbrace{-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{<0} \underbrace{- \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}_{<0} - \ldots \underbrace{- \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}}_{<0} < 0.$$

Andererseits gilt

$$-\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}}_{>0} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}}_{>0} + \frac{1}{2n+1} > -\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1} > -1.$$

Damit folgt die Behauptung.

Aufgabe 4.11. Zunächst erhält man

$$5^p + 4p^4 = x^2 \Rightarrow 5^p = x^2 - 4p^4 = (x - 2p^2)(x + 2p^2).$$

Da 5 eine Primzahl ist, muss sowohl $x - 2p^2$ als auch $x + 2p^2$ eine Potenz von 5 sein, also

$$\begin{aligned} x - 2p^2 &= 5^a \quad \text{und} \\ x + 2p^2 &= 5^b \end{aligned}$$

mit $a < b$.

- Fall 1: $a > 0$. Somit gilt $5 \mid x - 2p^2$ und $5 \mid x + 2p^2$, damit auch

  $$5 \mid [(x + 2p^2) - (x - 2p^2)] = 4p^4.$$

  Da p eine Primzahl ist, bleibt nur $p = 5$. Einsetzen in den ursprünglichen Ausdruck ergibt

  $$5^5 + 4 \cdot 5^4 = 5^4 \cdot (5 + 4) = 5^4 \cdot 9 = (5^2 \cdot 3)^2 = 75^2.$$

  Damit ist $p = 5$ tatsächlich eine Lösung mit der zugehörigen Quadratzahl 75^2.
- Fall 2: $a = 0$. Demnach gilt $x - 2p^2 = 1$, also $x = 2p^2 + 1$. Eingesetzt in die oben faktorisiert Gleichung erhält man

  $$5^p = \underbrace{(x - 2p^2)}_{=1}(x + 2p^2) = x + 2p^2 = 2p^2 + 1 + 2p^2 = 4p^2 + 1,$$

  also $5^p = 4p^2 + 1$. Generell gilt jedoch $5^k > 4k^2 + 1$ für $k \geq 2$.

  Beweis durch Induktion:

  Induktionsbasis: $k = 2$: $5^2 = 25 > 4 \cdot 2^2 + 1 = 17$

  Induktionsschritt $k \to k + 1$: Angenommen die Behauptung stimmt für ein k, also $5^k > 4k^2 + 1$ (Induktionsannahme). Dann gilt weiters

  $$4(k + 1)^2 + 1 \overset{k+1<2k}{<} 4(2k)^2 + 1 < 4 \cdot (4k^2 + 1) \overset{\text{I.A.}}{<} 4 \cdot 5^k < 5^{k+1}$$

  wodurch die Ungleichung gezeigt ist und es damit keine weiteren Lösungen geben kann.

Aufgabe 4.12. Bezeichnen wir mit P das Produkt aller Teiler, also

$$P = \prod_{j=1}^{42} (p_j^2 + 1).$$

Multipliziert man die Gleichung mit n^2P erhält man

$$n^2 \cdot \sum_{j=1}^{42} \underbrace{\frac{P}{p_j^2+1}}_{\in\mathbb{Z}} = P.$$

Nun machen wir eine Fallunterscheidung ob einer der Primzahlen 3 ist:

- Keine der Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_{42}$ ist 3:
  Somit ist $p_j^2 + 1 \equiv -1 \pmod 3$ und damit $P \equiv (-1)^{42} = 1 \pmod 3$.
  Jeder der Summanden
  $$\frac{P}{p_i^2+1} = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{42} (p_i^2+1)$$
  ist damit kongruent zu $(-1)^{41} = -1 \pmod 3$. Damit ist die Summe dieser 42 Summanden durch 3 teilbar, jedoch die rechte Seite nicht. Ein Widerspruch!
- Eine der Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_{42}$ ist 3:
  Sei deshalb o.E. $p_1 = 3$. Somit ist $p_1^2 + 1 \equiv 10 \equiv 1 \pmod 3$. Für die übrigen Primzahlen gilt $p_i^2 + 1 \equiv -1 \pmod 3$.
  Der erste Summand
  $$\frac{P}{p_1^2+1} = \prod_{j=2}^{42} (p_j^2+1)$$
  ist damit kongruent zu $(-1)^{41} = -1 \pmod 3$. Für übrigen Summanden sind kongruent zu $(-1)^{41} \cdot 1 = 1 \pmod 3$, wodurch die Summe kongruent zu $40 \equiv 1 \pmod 3$ ist. Da $n^2 = 0, 1 \pmod 3$, ist die linke Seite der Gleichung kongruent zu 0 oder 1, die rechte Seite jedoch kongruent zu -1 modulo 3. Wieder ein Widerspruch!

Damit kann es keine Lösungen geben.

Aufgabe 4.13. Die geometrische Summenformel besagt

$$1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1},$$

also durch Umformen

$$(1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-1}) \cdot (a - 1) = a^n - 1.$$

Deshalb gilt für alle $a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$

$$a - 1 | a^n - 1.$$

Sei nun m keine Primzahl, also $m = k \cdot l$ mit $k, l \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Setzt man $a = 2^k$ und $n = l$ erhält man

$$2^k - 1 | (2^k)^l - 1 = 2^m - 1.$$

Da $m > k \geq 2$ ist $2^k - 1$ ein echter Teiler von $2^m - 1$ und damit $2^m - 1$ keine Primzahl. Also kann $2^m - 1$ nur dann eine Primzahl sein, wenn m selbst eine Primzahl ist.

Aufgabe 4.14. Wie in der vorigen Lösung zeigen wir

$$a - 1 | a^n - 1$$

für alle ganzen Zahlen a und $n \in \mathbb{N}$. Ersetzt man a mit $-a$ ergibt sich

$$\begin{aligned} & -a - 1 | a^n \cdot (-1)^n - 1 \\ \Leftrightarrow \quad & a + 1 | (-a)^n - 1. \end{aligned}$$

Deshalb gilt für **ungerade** n

$$\begin{aligned} & a + 1 | a^n \cdot (-1) - 1 = -a^n - 1 \\ \Leftrightarrow \quad & a + 1 | a^n + 1. \end{aligned}$$

Sei nun m keine Zweierpotenz. Deshalb enthält m einen ungeraden Faktor l, also $m = k \cdot l$ mit $l \in \mathbb{N}^u$. Durch die vorige Formel mit $a = 2^k$ gilt deshalb

$$2^k + 1 | (2^k)^l + 1 = 2^m + 1.$$

Somit ist $2^m + 1$ keine Primzahl und kann nur eine Primzahl sein, wenn m eine Zweierpotenz ist.

Aufgabe 4.15. Zunächst erhält man für $p = 7$ und $p = 11$

$$a | 7^4 - 1 = 2400 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2$$

und

$$a | 11^4 - 1 = 14640 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 61,$$

zusammen also $a | 2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 240$. Wir wollen nun zeigen, dass tatsächlich $a = 240$ gilt.

Faktorisieren ergibt

$$p^4 - 1 = (p^2 - 1)(p^2 + 1).$$

- Aus $2 \nmid p$ folgt $p^2 \equiv 1 \pmod 8$, damit $8 | p^2 - 1$ und ebenfalls $2 | p^2 + 1$, somit $2^4 | p^4 - 1$.

- Wegen $3 \nmid p$ gilt $p^2 \equiv 1 \pmod 3$ und damit $3|p^2-1$.
- Da $5 \nmid p$ gilt $5|p^4-1$ wie man in einer modulo 5 Tabelle nachrechnen kann.

Zusammen gilt $2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 240|p^4-1$ wie gewünscht.

Aufgabe 4.16. Seien $\overline{ab}$ die ersten zwei Ziffern, und x der Rest der betrachteten Zahl, wenn die ersten beiden Ziffern gelöscht worden sind. Sei k die Anzahl der Ziffern von x.

Dann kann man die Voraussetzung so interpretieren:

$$n = 10^k \cdot \overline{ab} + x = 73x$$

$$10^k \cdot \overline{ab} = 72x$$

Versuchen wir zunächst, eine einstellige Lösung für x zu finden. Dann haben wir:

$$10 \cdot \overline{ab} = 72x.$$

Da die linke Seite durch 5 teilbar ist, gilt $x = 5$.

Aus $10 \cdot ab = 360$ folgt $\overline{ab} = 36$ und die gesuchte Zahl ist 365.

Sei x jetzt eine zweistellige Zahl, dann gilt

$$100 \cdot \overline{ab} = 72x,$$

d.h. $25 \cdot \overline{ab} = 18x$. Da x durch 25 teilbar sein muss, gilt $\overline{ab} = 18$.

Die kleinste Lösung bekommen wir für $\overline{ab} = 18$, dann ist $x = 25$ und die gesuchte Zahl ist 1825.

Aufgabe 4.17. Es gilt $n^5 \equiv \pmod{10})$, wie man etwa durch eine Tabelle von Restklassen modulo 10 feststellen kann. Multiplikation mit n^{k-1} für $k \geq 1$ liefert

$$n^{k+4} \equiv n^k \pmod{10}.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
n^1 \equiv n^5 \equiv n^9 \equiv \ldots \equiv n^{1997} \pmod{10}\\
n^2 \equiv n^6 \equiv n^{10} \equiv \ldots \equiv n^{1998} \pmod{10}\\
n^3 \equiv n^7 \equiv n^{11} \equiv \ldots \equiv n^{1999} \pmod{10}\\
n^4 \equiv n^8 \equiv n^{12} \equiv \ldots \equiv n^{2000} \pmod{10}.
\end{aligned}$$

Deshalb erhält man

$$S(n) \equiv n^0 + 500 \cdot (n^1 + n^2 + n^3 + n^4) \equiv n^0 \equiv 1 \pmod{10}.$$

Aufgabe 4.18. Wir wollen also $2019^{2021} \equiv 19^{2021} \pmod{100}$ bestimmen. Wir betrachten getrennt voneinander die Zahl modulo 4 und 25.

- Modulo 4: Es gilt
$$2019^{2021} \equiv (-1)^{2021} \equiv -1 \equiv 3 \pmod{4}.$$
Somit lässt die gesuchte Zahl den Rest 3 bei Division durch 4. Es kommen also nur noch die Zahlen 3, 7, 11, 15, ..., 95 und 99 in Frage.
- Modulo 25: Es gilt $2019 \equiv 19 \equiv -6 \pmod{25}$ wodurch wir $(-6)^{2021}$ modulo 25 bestimmen wollen. Wir werden zunächst damit starten, eine möglichst kleine Zahl a zu finden, sodass $6^a \equiv \pm 1$ modulo 25 ist, welche uns für die restliche Lösung helfen wird:
$$\begin{aligned}
6^1 &\equiv 6 && \pmod{25}\\
6^2 &\equiv 6 \cdot 6 \equiv 36 \equiv 11 && \pmod{25}\\
6^3 &\equiv 6 \cdot 6^2 \equiv 6 \cdot 11 \equiv 66 \equiv 16 && \pmod{25}\\
6^4 &\equiv 6 \cdot 6^3 \equiv 6 \cdot 16 \equiv 96 \equiv 21 && \pmod{25}\\
6^5 &\equiv 6 \cdot 6^4 \equiv 6 \cdot 21 \equiv 126 \equiv 1 && \pmod{25}
\end{aligned}$$
Somit ist
$$19^5 \equiv (-6)^5 \equiv (-1)^5 \cdot 6^5 \equiv -1 \pmod{25}$$
und damit
$$19^{10} \equiv (19^5)^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{25}.$$
Deshalb ist
$$19^{2021} \equiv 19^{2020} \cdot 19 \equiv (19^{10})^{202} \cdot 19 \equiv 1^{202} \cdot 19 \equiv 19 \pmod{25}.$$
Somit können die letzten beiden Ziffern nur 19, 44, 69 oder 94 sein.

Die einzige Zahl, die sowohl bei Betrachtung modulo 4 als auch 25 erlaubt ist, ist 19. Somit endet die Zahl 2019^{2021} auf 19.

Aufgabe 4.19. Umformen nach b ergibt

$$b = \frac{3a-7}{9a+5}.$$

Wir wollen nun zeigen, dass der Bruch „nahe“ an $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ liegt wenn $|a|$ „groß“ ist und somit nicht ganzzahlig ist. Es gilt

$$\begin{aligned} b = \frac{3a-7}{9a+5} &= \frac{3a+\frac{5}{3}}{9a+5} + \frac{-\frac{5}{3}-7}{9a+5} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{5+21}{27a+15} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{26}{27a+15}. \end{aligned}$$

Für $|a| \geq 4$ gilt nach der umgekehrten Dreiecksungleichung $|27a+15| \geq 27|a| - 15 \geq 27 \cdot 4 - 15 = 93$ womit $|\frac{26}{27a+15}| = \frac{26}{|27a+15|} \leq \frac{26}{93} < \frac{1}{3}$ gilt und b keine ganze Zahl sein kann.

Sei deshalb nun $a \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Dies liefert für b die 7 Zahlen

$$\frac{8}{11}, 1, \frac{5}{2}, \frac{-7}{5}, \frac{-2}{7}, \frac{-1}{23}, \frac{1}{16}.$$

Somit liefert nur $a = -2$ eine ganze Zahl für b, wodurch man das einzige Lösungspaar $(a, b) = (-2, 1)$ erhält.

Aufgabe 4.20. Betrachten wir die Gleichung modulo 5. Wir bemerken, dass eine Quadratzahl n^2 modulo 5 die drei Reste 0, 1 und 4 haben kann (diese nennt man quadratische Reste modulo 5).

Daraus folgt, dass die linke Seite der Gleichung einen von diesen Resten modulo 5 hat.

Die rechte Seite ergibt $2y^2$ modulo 5, da die restlichen Terme alle durch 5 teilbar sind. Wir benutzen wieder quadratische Reste modulo 5 um zu schließen, dass $2y^2$ nur die Reste 0, 2 oder 3 bei Division durch 5 haben kann.

Da die linke und rechte Seite einer Gleichung den gleichen Rest modulo 5 haben müssen, müssen sowohl x als auch y durch 5 teilbar sein.

In diesem Fall, ist die linke Seite durch 25 teilbar, die rechte jedoch nicht, und die Gleichung hat somit keine ganzzahligen Lösungen.

Aufgabe 4.21. Bringen wir alle Terme auf eine Seite, so erhalten wir die Gleichung

$$3x^4 + 24x^2 - 25y^2 + 2013 = 0.$$

Da alle Terme außer $25y^2$ durch 3 teilbar sind, muss y auch durch 3 teilbar sein. Sei $y = 3y_1$. Wir können beide Seiten durch 3 teilen und erhalten

$$x^4 + 8x^2 - 75y_1^2 + 671 = 0.$$

Wir sehen, dass x nicht durch 3 teilbar sein kann, da nur 671 nicht durch 3 teilbar ist. Wenn $x \equiv 1 \pmod 3$ oder $x \equiv 2 \pmod 3$ ist, dann gilt $x^2 \equiv x^4 \equiv 1 \pmod 3$. Daraus folgt, dass $x^4 + 8x^2$ durch 3 teilbar ist. Aber dann müsste auch 671 durch 3 teilbar sein. Wir schließen, dass die Gleichung keine ganzzahligen Lösungen hat.

Aufgabe 4.22. Modulo 7 lässt sich die Angabe schreiben als

$$x^3 - y^3 \equiv 4 \pmod 7.$$

Diese Gleichung hat keine Lösungen, da $x^3,\ y^3 \in \{0,\ 1,\ -1\}$ modulo 7 gilt.

Aufgabe 4.23. Addiert man 1 auf beiden Seiten erhält man

$$4a^2 + 4a + 1 = b^2 + 3b + 1.$$

Die linke Seite lässt sich nun schreiben als $(2a+1)^2$, womit $b^2 + 3b + 1$ eine Quadratzahl sein muss. Es gilt jedoch

$$\begin{aligned} b^2 + 3b + 1 &> b^2 + 2b + 1 = (b+1)^2 \\ b^2 + 3b + 1 &< b^2 + 4b + 4 = (b+2)^2 \end{aligned}$$

wodurch $b^2 + 3b + 1$ zwischen zwei aufeinander folgenden Quadratzahlen liegt und damit selbst keine Quadratzahl sein kann. Somit kann es keine Lösung der Gleichung geben.

Aufgabe 4.24.
Addieren wir die beiden Gleichungen, so erhalten wir

$a^3 - a + b^2 - 3b = 28.$

Für $a \geq 4$ gilt $a^3 - a \geq 64$. Da aber $b^2 - 3b \geq -2$ für alle natürlichen Zahlen b erfüllt ist, folgt daraus, dass $a \leq 3$ gelten muss.

Wir setzen nun der Reihe nach die verbleibenden Möglichkeiten für die Zahl a ein.

Für $a = 1$, erhalten wir die quadratische Gleichung $b^2 - 3b = 28$, die keine natürliche Lösung hat.

Für $a = 2$ erhalten wir die quadratische Gleichung $b^2 - 3b = 22$, die keine natürliche Lösung hat.

Für $a = 3$ erhalten wir die quadratische Gleichung $b^2 - 3b = 4$, deren einzige natürliche Lösung $b = 4$ ist.

Man kann leicht überprüfen, dass das Paar (3, 4) eine Lösung des Systems ist.

Quellenangabe zu den Aufgaben

Aufgabe 1.1.
aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.2. aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.3. aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.4. aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.5.
aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.6. aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.7. aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.8.
aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.9.
aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.10. aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.11.
aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.12.
aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.13.
aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.1. Mathematical Duel 2019 C–T–3 [Kategorie C, Teamwettbewerb Aufgabe 3] (Robert Geretschläger), übersetzt und bearbeitet von Veronika Schreitter und vom MmF-Team.

Hinweis: Gesammelte Aufgaben zwischen 2009–2017 siehe [2].

Aufgabe 2.2. siehe [3, Individual Aufgabe 2], übersetzt und bearbeitet von Veronika Schreitter und vom MmF-Team

Aufgabe 2.3. siehe [5, Teambewerb Aufgabe 3], übersetzt und bearbeitet von Veronika Schreitter und vom MmF-Team

Aufgabe 2.4. siehe [7, BWF 2007, Aufgabe 5], bearbeitet von Veronika Schreitter und vom MmF-Team

Aufgabe 2.5. siehe [4, Individual Aufgabe 2], bearbeitet von Veronika Schreitter und vom MmF-Team

Aufgabe 3.1: aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.2. aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.3: aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.4: aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.5.
aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.6: aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.7: aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.8. aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.9.
A. Akopyan, Geometry in Figures, Problems 6.2.1. [6], bearbeitet von Josef Greilhuber und vom MmF-Team.

Aufgabe 3.10.
Allgemein bekannt, bearbeitet von Josef Greilhuber und vom MmF-Team

Aufgabe 3.11.
Allgemein bekannt, bearbeitet von Josef Greilhuber und vom MmF-Team

Aufgabe 3.12.
Allgemein bekannt, bearbeitet von Josef Greilhuber und vom MmF-Team

Aufgabe 3.13.
Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene 2012 (nachzulesen in [8]), bearbeitet vom Josef Greilhuber und von MmF-Team.

Aufgabe 3.14.
Allgemein bekannt, bearbeitet von Josef Greilhuber und vom MmF-Team

Aufgabe 3.15.
Allgemein bekannt, bearbeitet von Josef Greilhuber und vom MmF-Team.

Aufgabe 3.16.
Allgemein bekannt, bearbeitet von Josef Greilhuber und vom MmF-Team.

Aufgabe 3.17.
Allgemein bekannt, bearbeitet von Josef Greilhuber und vom MmF-Team.

Aufgabe 3.18.
A. Akopyan, Geometry in Figures, Problems 4.4.6 and 4.4.7. [6], bearbeitet von Josef Greilhuber und

vom MmF-Team.

Aufgabe 3.19.
Allgemein bekannt, bearbeitet von Josef Greilhuber und vom MmF-Team.

Aufgabe 3.20.
A. Akopyan, Geometry in Figures, Problem 4.3.17. [6], bearbeitet von Josef Greilhuber und vom MmF-Team.

Aufgabe 3.21.
A. Akopyan, Geometry in Figures, Problem 5.3.6. [6], bearbeitet von Josef Greilhuber und vom MmF-Team.

Aufgabe 3.22.
A. Akopyan, Geometry in Figures, Problem 5.4.24. [6], bearbeitet von Josef Greilhuber und vom MmF-Team.

Aufgabe 3.23: aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.1. aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.2. aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.3. aus [7, GWF 2002, Problem 1], bearbeitet von Jakob Steininger und vom MmF-Team

Aufgabe 4.4. aus [7, BWFZ 2005, Aufgabe 1], bearbeitet von Jakob Steininger und vom MmF-Team

Aufgabe 4.5. aus [7, BWF 2005, Aufgabe 1], bearbeitet von Jakob Steininger und vom MmF-Team

Aufgabe 4.6. aus [7, LWA 2001, Problem 1], bearbeitet von Jakob Steininger und vom MmF-Team

Aufgabe 4.7. Folklore

Aufgabe 4.8. aus [7, GWF 2001, Problem 4], bearbeitet von Jakob Steininger und vom MmF-Team

Aufgabe 4.9. bekanntes Resultat, formuliert von Jakob Steiniger, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.10. bekanntes Resultat, formuliert von Jakob Steiniger, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.11. aus [7, GWF 2003, Problem 2], bearbeitet von Jakob Steininger und vom MmF-Team

Aufgabe 4.12. aus [8, GWF 2011, Problem 1], bearbeitet von Jakob Steininger und vom MmF-Team

Aufgabe 4.13. Folklore, siehe den Wikipedia Eintrag zu Mersenne-Zahlen. Formuliert von Jakob Steininger, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.14. Folklore, siehe z.B. den Wikipedia Eintrag zu Fermat-Zahlen. Formuliert von Jakob Steininger, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 4.15. bekanntes Resultat, formuliert von Jakob Steiniger, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.16. aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.17. aus [7, GWF 2001, Problem 1], bearbeitet von Jakob Steininger und vom MmF-Team

Aufgabe 4.18. von Jakob Steiniger, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.19. von Jakob Steiniger, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.20. aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.21. aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.22. von Jakob Steiniger, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.23. aus [7, LWA 2005, Problem 1], bearbeitet von Jakob Steininger und vom MmF-Team

Aufgabe 4.24.
aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Literatur

[1] Kroatischer Regionalwettbewerb Natjecanja iz matematike u RH. http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci-SS.htm. (aufgerufen am 3. März 2021).

[2] Mathematical Duel: Gesammelte Aufgaben 2009-2017. http://mathematicalduel.eu/index.php/problems/archive. (aufgerufen am 3. März 2021).

[3] Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade (MEMO) 2008. https://kag.upol.cz/memo/texty/2sj_r_eng.pdf. (aufgerufen am 3. März 2021).

[4] Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade (MEMO) 2014. https://www.math.aau.at/OeMO/Downloads/datei/180. ÖMO-Account notwendig (aufgerufen am 3. März 2021).

[5] Mitteleuropäische Mathematik Olympiade (MEMO) 2016. https://www.math.aau.at/MEMO2016/?page_id=20. (aufgerufen am 3. März 2021).

[6] Arseniy Akopyan. *Geometry in Figures*. IST Austria, 2017. second edition.

[7] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2000–2008: Aufgaben und Lösungen*. Nova MD, 2018. Auflage 1.3.

[8] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2009–2018: Aufgaben und Lösungen*. Nova MD, 2019.