52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgaben des Kurswettbewerbs am 5. März 2021

Das sind die Aufgaben des Kurswettbewerbs für Fortgeschrittene, der am 5. März 2021 von 15:00-18:00 stattgefunden hat. Bei jeder Aufgabe konnten 8 Punkte erreicht werden. Die Aufgaben wurden von Nina Mitrovic, Josef Greilhuber, Veronika Schreitter und Karl Czakler zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1. Seien a, b und c reelle Zahlen. Zeige:

a) $2a^2 + 5b^2 + 20c^2 \geq 4ab + 4bc + 8ac$ *(4 Punkte)*

b) $a^2 + 2b^2 + 8c^2 \geq 2a(b + 2c)$ *(4 Punkte)*

Aufgabe 2. Gegeben sei ein Kreis k mit Mittelpunkt M. Die Strecke AB sei eine Sehne des Kreises und C ein Punkt auf AB. Der Umkreis des Dreiecks BCM schneide den Kreis k in einem weiteren Punkt D.

Beweise: $CA = CD$.

Aufgabe 3. Ein Spielstein steht auf einem beliebigen Feld eines $n \times n$-Schachbretts. Anna und Bob ziehen den Stein abwechselnd so, wie ein Läufer im Schach (Erklärung unten) gezogen werden darf. Dabei darf der Stein nur auf Felder gezogen werden, auf denen er noch nie gestanden ist (es zählt dabei nur das Feld, auf das der Stein gezogen wird, nicht die Felder, die er dabei überquert). Wer keinen Zug mehr machen kann, verliert.
Wer hat eine Gewinnstrategie - in Abhängigkeit vom Feld, auf dem sich der Spielstein am Anfang befindet - wenn

a) n gerade ist? *(4 Punkte)*

b) n ungerade ist? *(4 Punkte)*

Erklärung: Ein Läufer darf im Schach beliebig weit entlang einer Diagonale gezogen werden. Wenn er also z.B. auf einem 4×4-Brett auf dem Feld mit Koordinaten $(2, 3)$ steht, darf er auf folgende Felder gezogen werden: $(1, 2), (1, 4), (3, 4), (3, 2), (4, 1)$. Wenn man die Felder schachbrettartig schwarz und weiß färbt, sieht man, dass ein Läufer auch nach beliebig vielen Zügen immer auf derselben Farbe bleibt. Daher hat im Schach jeder Spieler zwei Läufer, einen auf den schwarzen und einen auf den weißen Feldern.

Aufgabe 4. Finde alle natürlichen Zahlen $a, b > 0$, für die gilt:

$$\mathrm{kgV}(a, b) - \mathrm{ggT}(a, b) = \frac{ab}{2021}$$

Hinweis: Die Primfaktorzerlegung von 2021 ist $2021 = 43 \cdot 47$.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Bilde vollständige Quadrate!

Aufgabe 2. Finde Winkelgleichheiten durch den Peripheriewinkelsatz und durch gleichschenkelige Dreiecke!

Aufgabe 3. Bilde Paare von jeweils zwei Feldern, die gegenseitig erreichbar sind!

Aufgabe 4. Setze $\mathrm{ggT}(a, b) = x, a = xa', b = xb'$.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Nina Mitrovic, Josef Greilhuber, Veronika Schreitter, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.
a) Wir bringen sämtliche Terme auf die linke Seite und ordnen geeignet um. Dadurch erhalten wir:

$$(a^2 - 4ab + 4b^2) + (b^2 - 4bc + 4c^2) + (a^2 - 8ac + 16c^2) \geq 0$$

Die Ausdrücke in den Klammern bilden jetzt jeweils ein vollständiges Quadrat, die Angabe ist also äquivalent zu

$$(a - 2b)^2 + (b - 2c)^2 + (a - 4c)^2 \geq 0$$

Das ist offensichtlich immer erfüllt, da Quadrate nicht negativ sein können.
b) Wir multiplizieren die Ungleichung mit 2 und erhalten dadurch

$$2a^2 + 4b^2 + 16c^2 \geq 4ab + 8ac$$

Ähnlich wie in a) bringen wir nun sämtliche Terme auf die linke Seite und ordnen geeignet um:

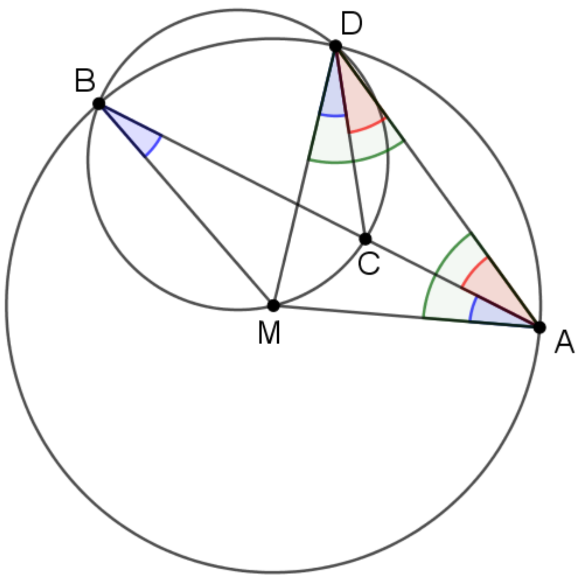
$$(a^2 - 4ab + 4b^2) + (a^2 - 8ac + 16c^2) \geq 0$$

Die eingeklammerten Terme bilden wieder vollständige Quadrate:

$$(a - 2b)^2 + (a - 4c)^2 \geq 0$$

wodurch die Angabe bewiesen ist.

Aufgabe 2.
Es gilt $MD = MA$, also ist MDA ein gleichschenkeliges Dreieck und daraus folgt $\angle DAM = \angle MDA$. Außerdem gilt $MA = MB$, also ist MBA ein gleichschenkeliges Dreick und daraus folgt $\angle BAM = \angle MBA$. Des weiteren folgt aus dem Peripheriewinkelsatz im Kreis $CBMD$ über der Sehne CM: $\angle MBA = \angle MBC = \angle MDC$. Insgesamt wissen wir also $\angle DAM = \angle MDA, \angle BAM = \angle MDC$ und damit folgt $\angle DAC = \angle DAM - \angle BAM = \angle MDA - \angle MDC = \angle CDA$, also ist CDA ein gleichschenkeliges Dreieck mit $CD = CA$.



Aufgabe 3.
a) Anna hat immer eine Gewinnstrategie.
Wir färben das Schachbrett schachbrettartig schwarz und weiß. Wir beobachten, dass der Stein immer auf der Farbe bleiben muss, auf der er am Anfang steht. Da n gerade ist, geht eine der beiden Hauptdiagonalen durch weiße Felder und eine durch schwarze Felder. Wenn der Stein am Anfang auf einem schwarzen Feld steht, kann Anna in jedem Zug die Position des Steins an der weißen Hauptdiagonale spiegeln. Dadurch ist die Spielsituation nach ihrem Zug immer symmetrisch um die weiße Hauptdiagonale und nach Bobs Zug muss das Spiegelfeld der neuen Position des Spielsteines immer frei sein, sodass ihr Zug immer möglich ist. Anna hat also immer einen möglichen Zug und wird daher gewinnen. Wenn der Stein am Anfang auf einem weißen Feld steht, spiegelt Anna immer an der schwarzen Hauptdiagonale.
b) Wir färben schachbrettartig wie in a). Falls der Stein am Anfang nicht auf der häufiger vorkommenden Farbe (die beide Hauptdiagonalen enthält) steht, kann Anna dieselbe Gewinnstrategie wie in a) anwenden. Sie kann beliebig wählen, welche der beiden Hauptdiagonalen sie für das Spiegeln verwendet.
Falls der Stein am Anfang auf der Farbe steht, die die Hauptdiagonalen enthält, hat Bob eine Gewinnstrategie: Er paart alle Felder außer dem Anfangsfeld in Paare, sodass in jedem Paar das eine Feld vom anderen aus erreichbar ist. Dazu wählt er erstmal eine Hauptdiagonale aus und paart jedes Feld, das nicht auf dieser Hauptdiagonale liegt, mit seinem Spiegelfeld bezüglich dieser Hauptdiagonale. Es gibt zwei Möglichkeiten: Falls das Anfangsfeld auf der Hauptdiagonale liegt, sind noch eine gerade Anzahl an Felder auf der Hauptdiagonale übrig, die er beliebig in Paar zusammenfassen kann. Falls das Anfangsfeld nicht auf der Hauptdiagonale liegt, paart er das Spiegelfeld das Anfangsfeldes stattdessen mit einem Feld auf der Hauptdiagonale (es gibt genau ein Feld auf der Hauptdiagonale, dass man von diesem Feld aus erreichen kann). Nun sind wiederum eine gerade Anzahl an Felder auf der Hauptdiagonale übrig. Nun hat Bob auf jeden Zug von Anna einen Antwortzug, indem er von einem Feld immer auf das gepaarte Feld fährt, und gewinnt somit.

Aufgabe 4.
Die Menge aller Lösungspaare ist in den letzten beiden Spalten in der Tabelle auf der nächsten Seite ersichtlich.
Wir definieren $\mathrm{ggT}(a, b) = x$. Dadurch gibt es natürliche Zahlen a', b' mit $\mathrm{ggT}(a', b') = 1$, sodass $a = x \cdot a'$ und $b = x \cdot b'$ gilt. Des weiteren gilt nun $\mathrm{kgV}(a, b) = x \cdot a' \cdot b'$. Damit ist die Gleichung äquivalent zu

$$xa'b' - x = \frac{xa'xb'}{2021}$$

Wir dividieren die Gleichung durch x und multiplizieren mit 2021:

$$2021a'b' - 2021 = xa'b'$$

Das können wir umformen zu:

$$(2021 - x)a'b' = 2021$$

Aus der Primfaktorzerlegung von 2021 ergibt sich, dass man 2021 nur auf zwei Arten als Produkt dreier natürlicher Zahlen schreiben kann: $43 \cdot 47 \cdot 1$ und $2021 \cdot 1 \cdot 1$. Bei jeder dieser Möglichkeiten können wir jetzt noch wählen, welche der Faktoren $2021 - x$, welcher a' und welcher b' ist. Die Tabelle auf der nächsten Seite listet alle neun Möglichkeiten inklusive der daraus entstehenden Lösungswerte für a und b auf. Man beachte, dass $x = 0$ zu einem Widerspruch führt, da ein ggT immer größer 0 sein muss.

$2021-x$	a'	b'	x	a	b
43	47	1	1978	$1978 \cdot 47$	1978
43	1	47	1978	1978	$1978 \cdot 47$
47	43	1	1974	$1974 \cdot 43$	1974
47	1	43	1974	1974	$1974 \cdot 43$
1	43	47	2020	$2020 \cdot 43$	$2020 \cdot 47$
1	47	43	2020	$2020 \cdot 47$	$2020 \cdot 43$
1	2021	1	2020	$2020 \cdot 2021$	1
1	1	2021	2020	1	$2020 \cdot 2021$
2021	1	1	0		

Tabelle 1: Lösungspaare zu Aufgabe 4

Quellenangaben zu den Aufgaben

Die Aufgaben wurden von Nina Mitrovic, Josef Greilhuber, Veronika Schreitter und vom MmF-Team erstellt und bearbeitet.

Aufgabe 1.
a) Nina Mitrovic, b) Josef Greilhuber

Aufgabe 2.
Karl Czakler

Aufgabe 3.
Veronika Schreitter

Aufgabe 4.
Nina Mitrovic