52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 26. Februar 2020

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Josef Greilhuber zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 25. Februar 2020 wird das Aufgabenblatt um Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Josef Greilhuber bespricht mit euch die Aufgaben im virtuellen Olympiade-Kurs am 26. Februar 2020 von 16:20–18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Dokument um ausgewählte Lösungsvorschläge und Quellenangaben.

Schreibe uns gerne, wenn du an unserem virtuellen Olympiade-Kurs teilnehmen möchtest. Du bist jederzeit herzlich willkommen.

Aufgaben

Beispiel 1 (ÖMO BWF Teil I 2015)**.** *Man zeige*

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2 \geq (a+b)(b+c)(c+d)(d+a)$$

für alle positiven reellen Zahlen a, b, c, d. Wann gilt Gleichheit?

Beispiel 2 (ÖMO GWF 2010)**.** *Es seien a, b relle Zahlen mit $0 \leq a, b \leq 1$. Man zeige:*

$$\sqrt{a^3b^3} + \sqrt{(1-a^2)(1-ab)(1-b^2)} \leq 1.$$

Beispiel 3 (ÖMO GWF 2015)**.** *Es seien x, y und z positive relle Zahlen mit $x+y+z=3$. Man beweise, dass mindestens eine der drei Zahlen*

$$x(x+y-z) \qquad y(y+z-x) \qquad z(z+x-y)$$

kleiner oder gleich 1 ist.

Beispiel 4 (ÖMO GWF 2012)**.** *Man beweise für alle reellen Zahlen a die Ungleichung*

$$a+a^3-a^4-a^6<1.$$

Satz 1 (Gewichtete Ungleichung von Jensen)**.** *Wir nennen eine Funktion* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *konvex, wenn für alle* $x, y \in (a, b), \lambda \in [0, 1]$ *gilt, dass* $\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda)y)$*. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn* f *zweimal differenzierbar ist, und* f'' *überall nichtnegativ ist. Es seien nun* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *eine solche konvexe Funktion, und* $x_1, \ldots, x_n \in (a, b)$ *und* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ *sodass* $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$*. Dann gilt die* Jensen'sche Ungleichung

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

Wenn die Funktion f *sogar strikt konvex ist, was z.B. dann der Fall ist, wenn* f'' *überall positiv ist, gilt Gleichheit genau dann, wenn alle Zahlen* $x_1, \ldots, x_n$ *mit* λ*-Gewichten verschieden von null gleich sind.*

Beispiel 5 (Alpha-Mittel-Ungleichung)**.** *Es seien* $x_1, \ldots, x_n$ *positive relle Zahlen, und* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Wir definieren nun das* α-Mittel *der Zahlen* $x_1, \ldots, x_n$ *als*

$$M_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \left(\frac{x_1^\alpha + \cdots + x_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

für beliebiges $\alpha \neq 0$*, und* $M_0(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$*. Man zeige, dass für reelle Zahlen* $\alpha < \beta$ *immer* $M_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \leq M_\beta(x_1, \ldots, x_n)$ *gilt, mit Gleichheit genau dann, wenn* $\alpha = \beta$*, oder wenn* $x_1 = \cdots = x_n$*.*

Beispiel 6 (ÖMO GWF 2014)**.** *Man zeige: Es gibt keine positiven rellen Zahlen* x, y, z *mit*

$$(12x^2 + yz)(12y^2 + xz)(12z^2 + xy) = 2014x^2y^2z^2.$$

Beispiel 7 (ÖMO BWF 2012)**.** *Man bestimme eine möglichst große Zahl* m*, sodass für alle von Null verschiedenen rellen Zahlen* a, b, c *mit* $\left|\frac{1}{a}\right| + \left|\frac{1}{b}\right| + \left|\frac{1}{c}\right| \leq 3$ *die Ungleichung*

$$\left(a^2 + 4(b^2 + c^2)\right)\left(b^2 + 4(c^2 + a^2)\right)\left(c^2 + 4(a^2 + b^2)\right) \geq m$$

gilt. Wann gilt Gleichheit?

Beispiel 8 (MEMO 2013)**.** *Seien* a, b, c *positive reelle Zahlen mit*

$$a + b + c = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Man zeige, dass

$$2(a + b + c) \geq \sqrt[3]{7a^2b + 1} + \sqrt[3]{7b^2c + 1} + \sqrt[3]{7c^2a + 1}.$$

Man finde alle Tripel (a, b, c)*, für die Gleichheit gilt.*

Hinweise

Hinweis zu Beispiel 1. *Hier funktionieren fast alle denkbaren Ansätze. Eine Möglichkeit ist ausmultiplizieren und zu vollständigen Quadraten zusammenzufassen.*

Hinweis zu Beispiel 2. *Gleichungen und Ungleichungen, die links und rechts nicht mehr als zwei Wurzeln enthalten, kann man durch doppeltes Ausquadrieren in rein polynomielle Form bringen und dann lösen/beweisen.*

Hinweis zu Beispiel 3. *Angenommen, alle drei Zahlen wären größer als* 1*, dann wäre die Summe größer als* 3 *- aber wie sieht diese Summe aus? Ausmultiplizieren!*

Hinweis zu Beispiel 4. *Versuche, das Polynom zu faktorisieren!*

Hinweis zu Beispiel 5. *Die Funktion* $x \to x^\alpha$ *ist strikt konvex, wenn* $\alpha \geq 1$.

Hinweis zu Beispiel 6. *Eine Gleichung von derart hohem Grad in* $\mathbb{R}$ *am Papier zu lösen ist meist nicht möglich, daher denken wir uns "Hmm, vielleicht gibt es keine Lösung." Dann ist aber entweder die linke Seite immer größer oder immer kleiner als die rechte, wir müssen also eine Ungleichung beweisen. Diese geht mit AM-GM mit den richtigen Gewichten.*

Hinweis zu Beispiel 7. *Gewichtete QM-HM-Ungleichung.*

Hinweis zu Beispiel 8. *Gewichtete AM-GM-Ungleichung. Versuche, den Ausdruck so umzuformen, dass nur "freundliche" Terme, d.h. solche, die in der Nebenbedingung vorkommen, dastehen, und bedenke, dass in der Abschätzung im Gleichheitsfall der Ungleichung ebenfalls Gleichheit gelten muss!*