52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Vorbereitungskurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 18. September 2020

Vieta-Jumping

Einige typische Probleme in der Zahlentheorie lassen sich auf die Lösung einer quadratischen Gleichung in mehreren Variablen reduzieren, die zusätzlich noch von einem Parameter abhängt. Betrachten wir gleich das Beispiel, welches zur Entdeckung des “Vieta-Jumping” geführt hat:

Beispiel 1 (IMO 1988)**.** *Seien a und b ganze Zahlen, sodass a^2+b^2 durch $ab+1$ teilbar ist. Man zeige, dass dann $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ das Quadrat einer ganzen Zahl ist.*

Benennen wir $k := \frac{a^2+b^2}{ab+1}$, so können wir die Frage umformulieren zu:

Sei k eine positive ganze Zahl, sodass die Gleichung $a^2+b^2-k(ab+1)=0$ in den positiven ganzen Zahlen lösbar ist. Zeige, dass k das Quadrat einer ganzen Zahl ist.

Nun ist die Zahl k explizit benannt, und es kann besser mit ihr gearbeitet werden. Aber wie entscheiden wir abhängig vom Parameter k, ob die Gleichung lösbar ist?
Falls es eine Lösung in den positiven ganzen Zahlen gibt, dann gibt es immer auch eine “kleinste”, bezüglich einer von uns zu wählenden Größenfunktion. Wenn wir nun, ausgehend von dieser Lösung, zeigen können, dass es dann noch eine kleinere Lösung geben müsste, so kann es natürlich nie eine Lösung gegeben haben! Dieses sehr allgemeine Beweisprinzip wird *Unendlicher Abstieg* genannt.
Nehmen wir nun also für gegebenes $k \leq 2$ an, dass (a_1, b), $a_1 > b \geq 1$, eine Lösung mit minimalem b ist. (Der Fall $a_1 = b$ ist nur für $k = 1$ interessant).
In unserem speziellen Fall haben wir den *Satz von Vieta* zur Verfügung, der sagt, dass die zwei (nicht notwendigerweise verschiedenen) Lösungen einer quadratischen Gleichung $x^2 - px + q = 0$ die Bedingungen $x_1 + x_2 = p$ sowie $x_1 x_2 = q$ erfüllen.
Unser Paar (a_1, b) erfüllt $a_1^2 - kba_1 + b^2 - k = 0$. Wir fassen das nun als eine quadratische Gleichung in a_1 auf, und fragen nach den Eigenschaften der zweiten Lösung a_2, welche ebenfalls $a_2^2 - kba_2 + b^2 - k = 0$ löst. Nach dem Satz von Vieta gilt $a_1 + a_2 = kb$ und $a_1 a_2 = b^2 - k$. Wir beobachten zunächst, dass a_2 niemals negativ sein kann: In diesem Fall würde nämlich $a_2^2 - kba_2 + b^2 - k = a_2^2 + b^2 + k(b|a_2| - 1)$ positiv, also sicher nicht null sein. Nun folgen zwei Beobachtungen, die Teil (beinahe) jedes Vieta-Jumping-Beweises sind:

1. Aus $a_2 = kb - a_1$ schließen wir sofort, dass a_2 ganzzahlig ist.

2. Weil wir wissen, dass a_2 nichtnegativ sein muss, folgt aus $a_2 a_1 = b^2 - k$ sofort $0 \leq a_2 a_1 = b^2 - k < b_2$, und damit $0 \leq a_2 < b\frac{b}{a_1} < b$.

Falls a_2 von Null verschieden ist, haben also ein zweites Lösungspaar gefunden, nämlich (b, a_2), welches dieselbe Gleichung wie (a_1, b) erfüllt. Allerdings ist die kleinere Zahl, a_2, nun kleiner als b, was der Annahme widerspricht, dass b minimal war!
Falls $a_2 = 0$ gilt, so ist das noch kein Widerspruch, da wir nur behauptet haben, dass (a_1, b) das kleinste positive ganze Lösungspaar ist. Aber dann gilt genau $a_2 a_1 = b^2 - k = 0$, also $b^2 = k$, womit k das Quadrat einer ganzen Zahl ist. □

Beispiele

Beispiel 1 (IMO 1988)**.** *Seien a und b ganze Zahlen, sodass $a^2 + b^2$ durch $ab + 1$ teilbar ist. Man zeige, dass dann $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ das Quadrat einer ganzen Zahl ist.*

Beispiel 2. *Es sei k eine positive ganze Zahl. Man zeige, dass der Ausdruck $\frac{a^2+b^2+k}{ab}$ für positive ganze Zahlen a, b nur endlich viele ganzzahlige Werte annehmen kann.*

Beispiel 3. *Man finde alle ganzen Zahlen k, die sich als*

1. $k = \frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$
2. $k = \frac{(a+b+c)^2}{abc}$

mit positiven ganzen Zahlen a, b, c darstellen lassen.

Beispiel 4 (IMO 2007)**.** *Es seien a und b positive ganze Zahlen. Man beweise: Wenn $4ab - 1$ ein Teiler von $(4a^2 - 1)^2$ ist, so gilt $a = b$.*

Beispiel 5 (IMO 2003)**.** *Man bestimme alle Paare (m, n) positiver ganzer Zahlen, sodass $\frac{m^2}{2mn^2-n^3+1}$ eine positive ganze Zahl ist.*

Alle IMO - Angaben können auf der offiziellen Website heruntergeladen werden:
`https://www.imo-official.org/problems.aspx`