MATHEMATIK macht FREU(N)DE

52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen II - Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 02. Oktober 2020

1. Im spitzwinkligen Dreieck ABC sind die Strecken BB' und CC' Höhen. Eine Gerade durch den Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ABC schneidet die Seite AB im Punkt M und die Seite AC im Punkt N. Es seien M' und N' die Fußpunkte der Lote von M auf BB' beziehungsweise von N auf CC'.

   a) Man beweise, dass sich die Umkreise der Dreiecke $HN'B'$ und $HC'M'$ gegenseitig berühren.

   b) Man beweise, dass die Strecken $M'C'$ und $N'B'$ parallel zueinander sind. [1, 581223]

2. Gegeben ist ein konvexes Fünfeck $ABCDE$ mit $|BC| = |CD| = |DE| = |EA| = a$ und Innenwinkeln $|\angle AED| = |\angle DCB| = 90°$ sowie $|\angle EDC| = 120°$.

   a) Beweisen Sie, dass es möglich ist, das Fünfeck in zwei einander flächeninhaltsgleiche Dreiecke und ein Parallelogramm zu zerlegen.

   b) Berechnen Sie den Umfang und den Flächeninhalt des Fünfecks in Abhängigkeit von a.

   Hinweis: Ein Fünfeck ist konvex, wenn alle seine Diagonalen mit Ausnahme der Endpunkte im Inneren des Fünfecks verlaufen. [1, 590935]

3. Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$. Auf der Seite AB werde ein Punkt P gewählt. Bei Spiegelung an den Diagonalen BD und AC gehe P in die Punkte Q bzw. R über.

   Für welche Lage von P ist der Flächeninhalt des Dreiecks PQR maximal? [1, 590933]

4. Ein Quadrat $ABCD$ wird durch eine Gerade g in zwei Teile mit gleichem Flächeninhalt zerlegt. Man beweise, dass dann der Diagonalenschnittpunkt M des Quadrats $ABCD$ auf der Geraden g liegt. [1, 591212]

5. Gegeben ist ein Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten AB und CD.

   a) Beweise: Wenn die Seiten AD und CD gleich lang sind, dann halbiert die Gerade AC den Winkel $\angle BAD$.

   b) Wir setzen nun voraus, dass die Gerade AC den Winkel $\angle BAD$ halbiert und dass die Strecken AC und CD gleich lang sind. Weiter setzen wir voraus, dass der Winkel $\angle CBA$ die Grösse $70°$ hat. Berechne die Grössen der anderen drei Innenwinkel dieses Trapezes. [1, 590822]

6. Es sei ABC ein Dreieck mit rechtem Winkel bei C. Es sei H der Fußpunkt der Höhe vom Punkt C auf die Seite AB. Weiter seien M der Punkt auf der Seite AB, für den die Strecken BM und BC gleich lang sind, und N der Punkt auf AC, für den die Strecken CN und CH gleich lang sind.

   Beweise, dass die Geraden MN und AC senkrecht aufeinander stehen. [1, 570836]

7. In einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Basis AB und Basiswinkeln der Größe $\alpha < 45°$ schneiden die Mittelsenkrechten der Schenkel AC und BC die Basis in den Punkten E und F.

   a) Angenommen, es gilt $\alpha = 30°$. Weisen Sie nach, dass dann $|AE| = |EF| = |FB|$ gilt.

   b) Angenommen, es gilt $0 < \alpha < 45°$. Zeigen Sie, dass die Umkreismittelpunkte der Dreiecke EBC und FCA auf dem Umkreis k des Dreiecks EFC liegen. [1, 571024]

8. Wir betrachten ein beliebiges spitzwinkliges Dreieck ABC und den Kreis k, der durch den Punkt A verläuft und dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Strecke AC ist. Da das Dreieck ABC spitzwinklig ist, schneidet der Kreis k die Strecke AB in einem von A und B verschiedenen Punkt, der mit D bezeichnet wird, und die Tangente an den Kreis k im Punkt D schneidet die Strecke BC in einem von B und C verschiedenen Punkt, der mit E bezeichnet wird. Die Innenwinkelgrößen des Dreiecks ABC werden wie üblich mit α, β und γ bezeichnet.

   a) Untersuche, ob das Dreieck BED gleichseitig sein kann.

   b) Beweise: Wenn das Dreieck BED gleichschenklig ist, dann gilt $2 \cdot \beta = \alpha + 90°$ oder $\beta = 2 \cdot \alpha$.

   c) Beweise: Wenn $2 \cdot \beta = \alpha + 90°$ oder $\beta = 2 \cdot \alpha$ gilt, dann ist das Dreieck BED gleichschenklig. [1, 560836]

Literatur

[1] Archivierte Aufgaben der Deutschen Mathematik-Olympiade. `https://www.mathematik-olympiaden.de/moev/index.php/aufgaben/aufgabenarchiv`. (aufgerufen am 2. Oktober 2020).