

52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Vorbereitungskurs „Mathematik macht Freu(n)de“

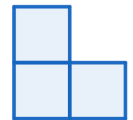
09. Oktober 2020

Schachbrettkombinatorik

Beispiel 1. Ist es möglich, auf einem 8×8 -Schachbrett acht Spielfiguren so aufzustellen, dass keine zwei Figuren in derselben Zeile oder Spalte sind, und sich genau eine davon auf einem weißen Feld befindet? Welche Zahlen sind für die Anzahl der Figuren, die auf weißen Feldern stehen, möglich? [MmF-Team]

Beispiel 2. Für welche n ist es möglich, ein $n \times n$ -Schachbrett mit 1×4 -Tetrominos so zu belegen, dass jedes Feld bedeckt ist, und keine zwei Tetrominos einander überschneiden (d.h. es zu „kacheln“)? [Folklore]

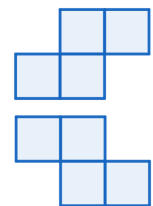
Beispiel 3. Auf einem $2^n \times 2^n$ -Schachbrett entfernen wir eines der vier Felder, die an den Mittelpunkt des Schachbretts angrenzen. Ist es möglich, den Rest des Schachbretts mit „L-Triominos“ (siehe Bild) zu kacheln? [Folklore]



Beispiel 4. Wir entfernen von einem 9×9 -Schachbrett das zweite Feld von links in der zweiten Reihe von oben. Kann der Rest mit 1×4 -Tetrominos gekachelt werden? [Folklore]

Beispiel 5. Wir betrachten ein Gitterpolygon, welches von S-Tetrominos (siehe Bild oben) gekachelt werden kann, wobei die Tetrominos waagrecht und senkrecht gedreht sein dürfen.

Zeige, dass jede Kachelung dieses Polygons mit sowohl S- als auch Z-Tetrominos (siehe Bild unten) eine gerade Anzahl von Z-Tetrominos verwenden muss. [1, IMO-Shortlist 2014]



Beispiel 6. Sei n eine positive ganze Zahl. Auf einem Spielbrett, das aus $4n \times 4n$ Quadraten besteht, werden genau $4n$ Spielsteine so platziert, dass sich in jeder Zeile und jeder Spalte ein Spielstein befindet. In einem Zug wird ein Spielstein horizontal oder vertikal auf ein benachbartes Quadrat bewegt. Mehrere Spielsteine dürfen sich gleichzeitig auf demselben Quadrat befinden. Die Spielsteine sollen so bewegt werden, dass sie alle Felder einer der beiden Diagonalen belegen. Man bestimme die kleinste Zahl $k(n)$ derart, dass dies für jede Ausgangssituation in höchstens $k(n)$ Zügen möglich ist. [2]

Beispiel 7. Es sei $n \geq 2$ eine ganze Zahl. Gegeben sei ein $n \times n$ Schachbrett bestehend aus n^2 Einheitsquadraten. Eine Konfiguration von n Türmen auf diesem Brett heiße friedlich, falls jede Zeile und jede Spalte genau einen Turm enthält. Man bestimme die größte positive ganze Zahl k , sodass man für jede friedliche Konfiguration von n Türmen ein $k \times k$ Quadrat ohne einen Turm auf einem seiner k^2 Einheitsquadrate finden kann. [1, IMO 2014]

Literatur

- [1] Internationale Mathematik-Olympiade. <https://www.imo-official.org/problems.aspx>. Alle IMO - Angaben und die meisten IMO-Shortlists vergangener Jahre (aufgerufen am 8. Oktober 2020).
- [2] Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade (MEMO) 2013. <https://memo2013.mik.uni-pannon.hu/>. (aufgerufen am 8. Oktober 2020).