52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Vorbereitungskurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 16. Oktober 2020

Schachbrettkombinatorik II

Beispiel 1. *Auf einem* 3×3*-Schachbrett stehen ein roter, ein grüner und ein blauer Springer. Ist es möglich, die Springer durch eine Folge erlaubter Spielzüge so zu vertauschen, dass der rote Springer auf derselben Stelle wie am Anfang steht, aber der grüne und der blaue nun vertauscht sind? (Dabei dürfen natürlich nie zwei Springer gleichzeitig am selben Feld stehen) [Folklore]*

Beispiel 2. *Wir betrachten Anordnungen der Zahlen* 1 *bis* 64 *auf den Feldern eines* 8×8*-Schachbretts, wobei jedes Feld genau eine Zahl enthält und jede Zahl genau einmal vorkommt. Eine Zahl in einer derartigen Anordnung heißt super-plus-gut, falls sie die größte Zahl in ihrer Zeile und gleichzeitig die kleinste Zahl in ihrer Spalte ist.*
Man beweise oder widerlege jeweils:

(a) *In jeder derartigen Anordnung gibt es mindestens eine super-plus-gute Zahl.*

(b) *In jeder derartigen Anordnung gibt es höchstens eine super-plus-gute Zahl.*

[1, BWF (Teil 2) 2016, Aufgabe 3 (Gerhard Woeginger)]

Beispiel 3. *Man bestimme die Anzahl der Möglichkeiten,* 2500 *Schachkönige auf einem Spielbrett so zu platzieren, dass in jeder Zeile und Spalte genau* 25 *Könige sind, und keine zwei Könige einander schlagen können (d.h. keine zwei Könige auf Feldern stehen, die einander waagrecht, senkrecht oder diagonal benachbart sind). [2, IMO-Shortlist 2010]*

Beispiel 4. *Ein Landstück hat die Form eines* 8×8*-Quadrates, dessen Seiten in Nord-Süd-beziehungsweise Ost-West-Richtung verlaufen, und besteht aus 64 kleineren quadratischen* 1×1*-Grundstücken. Auf jedem solchen Grundstück kann höchstens ein Haus stehen. Ein Haus steht auf höchstens einem* 1×1*-Grundstück. Wir sagen, ein Haus steht im Schatten, wenn drei Häuser auf den im Osten, Westen und Süden direkt angrenzenden Grundstücken stehen. Was ist die größtmögliche Anzahl an Häusern auf dem Landstück, sodass keines davon im Schatten steht? Bemerkung: Gemäß Definition stehen Häuser an der Ost-, West- und Südgrenze des Landstücks niemals im Schatten. [3, Teamwettbewerb]*

Beispiel 5. *Wir betrachten ein* $m \times m$*-Schachbrett aus Einheitsquadraten. Auf den Mittelpunkten mancher dieser Felder ist eine Ameise. Zum Zeitpunkt O beginnt jede Ameise, sich mit Geschwindigkeit* 1 *parallel zu einer Kante des Schachbretts zu bewegen. Wenn* genau *zwei Ameisen, die sich in entgegengesetzte Richtungen bewegen, einander auf einem Feld treffen, rotieren sie beide um* $90°$ *im Uhrzeigersinn und fahren fort, sich mit Geschwindigkeit* 1 *zu bewegen. In allen anderen Fällen fahren die Ameisen einfach unverändert mit ihrer Bewegung fort (z.B. wenn sie aus nicht gegenüberliegenden Richtungen kommen oder sich mehr als zwei Ameisen gleichzeitig am selben Feld treffen). Wenn eine Ameise eine Kante des Schachbretts erreicht, fällt sie herunter und kommt nicht mehr zurück.*
Man bestimme den spätest möglichen Zeitpunkt, zu dem die letzte Ameise vom Schachbrett fällt, oder beweise, dass es eine Startkonfiguration gibt, bei der nie alle Ameisen vom Brett fallen. [2, IMO-Shortlist 2011]

Literatur

[1] Alle ÖMO-Wettbewerbsangaben seit 2015. https://oemo.at/OeMO/aufgaben/. (aufgerufen am 13. Oktober 2020).

[2] Internationale Mathematik-Olympiade. https://www.imo-official.org/problems.aspx. Alle IMO - Angaben und die meisten IMO-Shortlists vergangener Jahre (aufgerufen am 13. Oktober 2020).

[3] Mitteleuropäische Mathematik Olympiade (MEMO) 2016. https://www.math.aau.at/MEMO2016/?page_id=20. (aufgerufen am 13. Oktober 2020).