52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Vorbereitungskurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 23. Oktober 2020

Kombinatorik mit dynamischen Strecken und Geraden

Beispiel 1. *Es sei A eine Menge von $2n$ Punkten, wobei keine drei Punkte aus A kollinear seien. Davon seien n rot und die anderen n Punkte blau eingefärbt.*
Man zeige oder widerlege: Es gibt n Strecken mit jeweils verschiedenfarbigen Eckpunkten aus A, sodass keine zwei Strecken einander überschneiden. [3, Putnam Competition 1979]

Beispiel 2. *Wir betrachten ein regelmäßiges $2n$-Eck mit n rot und n blau eingefärbten Eckpunkten. Ist es immer möglich, einen Streckenzug zu finden, der jeden Eckpunkt genau einmal besucht, sich dabei nie selbst überschneidet, und der immer abwechselnd rote und blaue Punkte besucht? [Mathematik macht Freu(n)de-Team]*

Beispiel 3. *In einem regelmäßigen 1000-Eck sind manche Punkte blau eingefärbt, alle anderen rot. Man zeige, dass es $2k$ aufeinanderfolgende Eckpunkte gibt, mit $100 \leq k \leq 300$, sodass unter den ersten k dieser Eckpunkte gleich viele Punkte blau sind wie unter den anderen k Eckpunkten. [1, IMO Shortlist 2011, abgewandelt]*

Beispiel 4. *Sei $n \geq 3$ eine ganze Zahl. Eine Folge $P_1, P_2, \ldots, P_n$ von verschiedenen Punkte in der Ebene wird* gut *genannt, wenn keine drei von ihnen auf einer Geraden liegen, der Kantenzug $P_1P_2 \ldots P_n$ sich nicht selbst überschneidet und das Dreieck $P_iP_{i+1}P_{i+2}$ für alle $i = 1, 2, \ldots, n-2$ gegen den Uhrzeigersinn orientiert ist.*
Bestimme für jede ganze Zahl $n \geq 3$ die größtmögliche Zahl k mit der folgenden Eigenschaft: Es existieren n verschiedene Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ in der Ebene, für die es k verschiedene Permutationen $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ gibt, sodass $A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, \ldots, A_{\sigma(n)}$ gut ist.
(Ein Kantenzug $P_1P_2 \ldots P_n$ besteht aus den Strecken P_1P_2, $P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n$.) [2]

Beispiel 5. *Sei $\mathcal{S}$ eine endliche Menge von mindestens zwei Punkten in der Ebene. Dabei wird angenommen, dass keine drei Punkte von $\mathcal{S}$ kollinear sind. Als Windmühle bezeichnen wir einen Prozess der folgenden Art. Wir starten mit einer Geraden, die genau einen Punkt $P \in \mathcal{S}$ enthält. Die Gerade wird im Uhrzeigersinn um den Drehpunkt P so lange gedreht, bis sie zum ersten Mal auf einen weiteren Punkt aus $\mathcal{S}$, der mit Q bezeichnet sei, trifft. Die Gerade wird weiter im Uhrzeigersinn mit Q als neuem Drehpunkt gedreht, bis sie wieder auf einen Punkt aus $\mathcal{S}$ trifft. Dieser Prozess wird unbegrenzt fortgesetzt.*
Man beweise, dass für geeignete Wahl eines Punktes $P \in \mathcal{S}$ und einer Ausgangsgeraden, die P enthält, die resultierende Windmühle jeden Punkt aus S unendlich oft als Drehpunkt hat. [1, IMO 2011]

Literatur

[1] Internationale Mathematik-Olympiade. https://www.imo-official.org/problems.aspx. Alle IMO - Angaben und die meisten IMO-Shortlists vergangener Jahre (aufgerufen am 21. Oktober 2020).

[2] Mitteleuropäische Mathematik Olympiade (MEMO) 2017. http://memo2017.lmnsc.lt/lt/problems_2017/. (aufgerufen am 21. Oktober 2020).

[3] A. P. Hillman, G. L. Alexanderson, and L. F. Klosinski. The William Lowell Putnam Mathematical Competition. *The American Mathematical Monthly*, 86(3):168–175, 1979.