52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Kurs für Internationale „Mathematik macht Freu(n)de" – Aufgabenblatt für den 17. Oktober 2020

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Ivan Izmestiev zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 13. Oktober 2020 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Ivan Izmestiev bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 17. Oktober 2020 von 10:00–11:45 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Komplexe Zahlen und Geometrie

Einführung in die komplexen Zahlen

Eine komplexe Zahl ist ein Ausdruck der Form $a + bi$, wobei a und b reelle Zahlen sind, und i die sogenannte *imaginäre Einheit*, eine neue Zahl mit der Eigenschaft $i^2 = -1$. Man kann komplexe Zahlen addieren und multiplizieren, sodass das Ergebnis wieder eine komplexe Zahl ist. Die Addition ist einfach:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Bei der Multiplikation muss man $i^2 = -1$ berücksichtigen:

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i. \tag{1}$$

Komplexe Zahlen sind in der Algebra sehr wichtig, so zum Beispiel besagt der *Fundamentalsatz der Algebra*, dass jedes Polynom mindestens eine komplexe Nullstelle hat. (Für quadratische Polynome kannst du es leicht selbst feststellen.) Komplexe Zahlen tauchen oft in den Problemen, die nichts "imaginäres" in sich tragen auf, wie z. B. in der Verteilung von Primzahlen. Bei diesem Übungsblatt helfen uns die komplexen Zahlen geometrische Aufgaben zu lösen.

Eine komplexe Zahl $a + bi$ kann man als einen Punkt der Ebene mit den Koordinaten (a, b) darstellen (dementsprechend nennt man die x-Achse reelle Achse, und die y-Achse imaginäre Achse). Den Abstand von z zu 0 (Ursprung) nennt man *Betrag* von z. Also

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Mit jeder komplexen Zahl z assoziiert man die *konjugiert komplexe* Zahl $\overline{z}$:

$$\text{wenn } z = a + bi, \text{ dann } \overline{z} = a - bi.$$

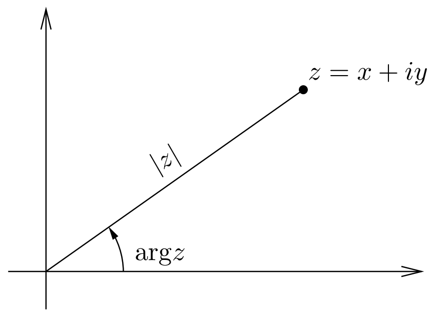
In der Zahlenebene liegt $\overline{z}$ symmetrisch zu z bezüglich der reellen Achse. Man prüft leicht, dass

$$z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Hat eine komplexe Zahl Betrag 1, so liegt sie auf dem Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ in der Zahlenebene. Wenn der Winkel von der positiven x-Halbachse zu dem Radiusvektor von z gleich φ ist, so heißt φ das *Argument* von z. Man hat dann $x = \cos\varphi$ und $y = \sin\varphi$. Die komplexe Zahl mit Betrag r und Argument φ lässt sich schreiben als

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Das nennt man die *trigonometrische Form* einer komplexen Zahl.



Das Gute an der trigonometrischen Form ist die folgende Tatsache, die eine Grundlage für die geometrischen Anwendungen der komplexen Zahlen bildet.

Satz 1. Bei Multiplikation zweier komplexer Zahlen werden ihre Beträge multipliziert und die Argumente addiert.

Beweis. Seien

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Mit Anwendung der oben hergeleiteten Formel (1) rechnen wir:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= r_1 r_2 \left((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\right) \\ &= r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right). \end{aligned}$$

□

Aufgabe 1.

a) Wie dividiert man komplexe Zahlen? Berechne $\frac{1+i}{1-i}$.

b) Wie verhalten sich die Beträge und die Argumente bei der Division von komplexen Zahlen? Markiere auf der Zahlenebene die Zahl $\frac{1}{z}$, wenn z gegeben ist.

Aufgabe 2.

a) Zeige: $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$.

b) Zeige, dass für jedes n die Funktionen

$$\cos n\varphi \quad \text{und} \quad \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}$$

Polynome in $\cos\varphi$ sind.

Einheitswurzel und reguläre n-Ecke

Als erste Anwendung betrachten wir die Geometrie der regulären n-Ecken.

Satz 2. Die Gleichung $z^n = 1$ hat n Lösungen, und zwar

$$z_0 = 1, \quad z_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}, \ \ldots, \ z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \text{ bis } k = n-1.$$

Die entsprechenden Punkte in der Zahlenebene sind die Ecken eines regulären n-Ecks eingeschrieben in den Einheitskreis mit Mittelpunkt 0.

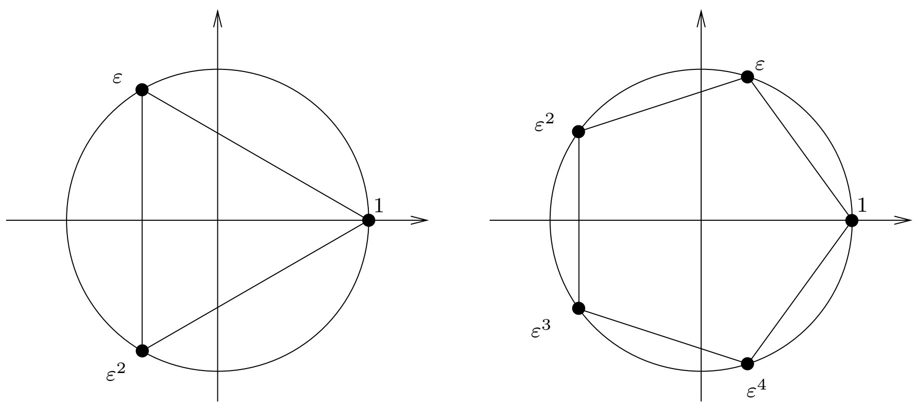
Beweis. Aus dem Satz 1 folgt

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \tag{2}$$

Damit gilt $z_k^n = 1$ für z_k wie oben.
Es ist auch leicht zu prüfen, dass es keine weiteren Lösungen gibt. □

Die Formel (2) heißt *Satz von de Moivre* und hat manche interessante Konsequenzen.
Für ein fixes n bezeichnen wir mit ε die Einheitswurzel z_1. Dann kann man alle n-ten Einheitswurzeln aufschreiben als

$$1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}.$$



Benutzen wir die Einheitswurzeln, um den goldenen Schnitt im regulären Fünfeck zu finden.

Satz 3. Das Verhältnis der Diagonale eines regulären Fünfecks zu seiner Seite ist der goldene Schnitt $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Beweis. Sei $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$, wie auf dem Bild oben rechts. Das gesuchte Verhältnis kann man zum Beispiel als

$$\left|\frac{\varepsilon - \varepsilon^4}{\varepsilon^2 - \varepsilon^3}\right|$$

schreiben. Da die komplexen Zahlen $\varepsilon - \varepsilon^4$ und $\varepsilon^2 - \varepsilon^3$ die gleichen Argumente haben, gilt

$$\left|\frac{\varepsilon - \varepsilon^4}{\varepsilon^2 - \varepsilon^3}\right| = \frac{\varepsilon - \varepsilon^4}{\varepsilon^2 - \varepsilon^3} = \frac{\varepsilon(1-\varepsilon^3)}{\varepsilon^2(1-\varepsilon)} = \varepsilon + 1 + \varepsilon^{-1}.$$

Zeigen wir, dass diese Zahl die Gleichung $x^2 = x + 1$ erfüllt. Es gilt

$$(\varepsilon + 1 + \varepsilon^{-1})^2 = \varepsilon^2 + 1 + \varepsilon^{-2} + 2\varepsilon + 2 + 2\varepsilon^{-1} = \varepsilon + 2 + \varepsilon^{-2},$$

wobei die letzte Gleichung aus

$$\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-2} = 0$$

folgt. Die Gleichung $x^2 = x + 1$ hat zwei reelle Wurzeln $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Da das gesuchte Verhältnis größer als 1 ist, ist es das mit dem Plus-Vorzeichen. $\square$

Aufgabe 3. Zeige, dass in einem regulären Neuneck die Differenz der Längen der größten und der kleinsten Diagonalen gleich der Seitenlänge ist.

Aufgabe 4. Sei $A_1 \dots A_n$ ein reguläres n-Eck mit Ecken auf einem Kreis mit Radius 1. Sei X ein Punkt auf dem Umkreis des n-Ecks. Zeige:

$$|XA_1|^2 + \cdots |XA_n|^2 = 2n,$$

und damit von der Lage des Punktes X unabhängig.

Aufgabe 5. Finde das Produkt der Längen aller Seiten und Diagonalen eines regulären n-Ecks mit Umkreis vom Radius 1.

Komplexe Zahlen und Formen der Dreiecke

Seien z_1, z_2, z_3 drei verschiedene komplexe Zahlen. In der Zahlenebene definieren Sie ein Dreieck. Der Quotient

$$(z_1; z_2, z_3) := \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}$$

enthält die ganze Information über die Form und die Orientierung des Dreiecks $\triangle z_1 z_2 z_3$, denn der Betrag von $(z_1; z_2, z_3)$ ist gleich dem Quotient der Längen der Seiten $z_1 z_3$ und $z_1 z_2$, und das Argument von $(z_1; z_2, z_3)$ ist gleich dem Winkel vom Vektor $\overrightarrow{z_1 z_2}$ zum Vektor $\overrightarrow{z_1 z_3}$.

Aufgabe 6. Wie sieht das Dreieck $z_1 z_2 z_3$ in den folgenden Fällen aus?

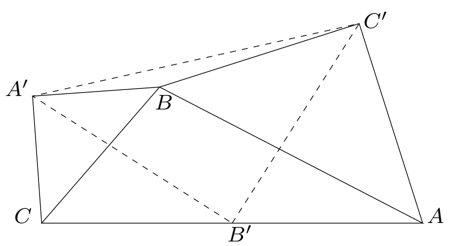
a) $(z_1; z_2, z_3) = i$

b) $(z_1; z_2, z_3) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Aufgabe 7. Wie liegen die Punkte z_1, z_2, z_3, wenn $(z_1; z_2, z_3)$ eine reelle Zahl ist?

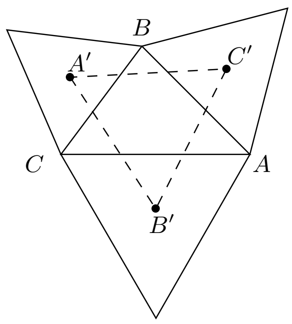
Die folgenden Aufgaben wurden im Fortgeschrittenen II-Kurs des letzten Jahres mit Hilfe von Drehungen und Drehstreckungen gelöst. Sie lassen sich mit Hilfe der komplexen Koordinaten auch sehr gut lösen.

Aufgabe 8. Sei ABC ein beliebiges Dreieck, und seien ABC' und BCA' gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke mit Hypotenusen AB, bzw. BC, nach außen von ABC konstruiert. Sei B' der Mittelpunkt der Seite AC.



Man zeige, dass das Dreieck $A'B'C'$ ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse $A'C'$ ist.

Aufgabe 9. (Satz von Napoleon.) Auf den Seiten eines Dreiecks errichtet man nach außen reguläre Dreiecke. Zeige, dass die Mittelpunkte dieser Dreiecke selbst ein reguläres Dreieck bilden.



Steiner-Inellipse und der Satz von Siebeck-Marden

Letzlich erwähne ich noch einen schönen Satz, genauer gesagt mehrere Sätze, von denen nur der letzte etwas mit komplexen Zahlen zu tun hat.

Die ersten zwei Sätze haben wunderschöne Beweise, für welche dieses Blatt leider zu klein ist.

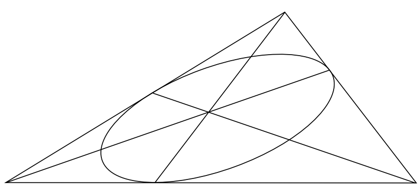
Satz 4. Sei ABC ein beliebiges Dreieck in der Ebene. Seien A', B', C' die Berührpunkte mit den Seiten BC, AC, AB einer in ABC eingeschriebenen Ellipse. Dann schneiden einander die Strecken AA', BB' und CC' in einem Punkt.

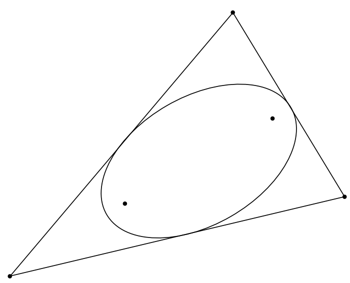
Umgekehrt, für beliebige Punkte A', B', C' mit der Eigenschaft, dass AA', BB', CC' einander in einem Punkt schneiden, gibt es eine Inellipse, die die Seiten in diesen Punkten berührt.

Satz 5 (Steiner)**.** Den größten Flächeninhalt unter allen Inellipsen eines Dreiecks hat die Ellipse, die die Seiten in ihren Mittelpunkten berührt.

Diese Ellipse heißt die *Steiner-Ellipse* des Dreiecks.

Satz 6 (Siebeck, Marden)**.** Seien z_1, z_2, z_3 drei komplexe Zahlen, die nicht auf einer Geraden liegen (wenn sie als Punkte der Zahlenebene gesehen werden). Betrachte das Polynom dritten Grades $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$. Seien w_1 und w_2 die Nullstellen seiner Ableitung $P'(z)$. Dann sind w_1 und w_2 die Brennpunkte der Steiner-Ellipse des Dreiecks $z_1z_2z_3$.





Für den letzten Satz siehe [1].

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1.

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \cdots$$

Aufgabe 2. Benutze die Formel

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi.$$

Aufgabe 3. Es darf angenommen werden, dass die Ecken des Neunecks die 9-ten Einheitswurzeln $1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^8$ sind. Es ist zu zeigen:

$$|1-\varepsilon^4| - |1-\varepsilon^2| = |1-\varepsilon|.$$

Es gilt

$$|1-\varepsilon^4| - |1-\varepsilon^2| = |1-\varepsilon^4| - |\varepsilon-\varepsilon^3| = |(1-\varepsilon^4) - (\varepsilon-\varepsilon^3)|,$$

da die komplexen Zahlen $1-\varepsilon^4$ und $\varepsilon-\varepsilon^3$ das gleiche Argument haben.

Aufgabe 4. Zeige, dass für zwei komplexe Zahlen z und a vom Betrag 1 folgendes gilt:

$$|z-a|^2 = 2 - a\overline{z} + \overline{a}z.$$

Aufgabe 5. $(z-\varepsilon)(z-\varepsilon^2)\cdots(z-\varepsilon^{n-1}) = \frac{1-z^n}{1-z}$

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Ivan Izmestiev, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.
Wir machen weiter dort, wo der Hinweis beendet wurde.

$$|(1-\varepsilon)-(\varepsilon-\varepsilon^3)| = |(1-\varepsilon)(1+\varepsilon^3)| = |1-\varepsilon|,$$

da $1+\varepsilon^3 = -\varepsilon^6$ ist und Betrag 1 hat.

Aufgabe 4.
Es darf angenommen werden, dass die Ecken des n-Ecks die n-ten Einheitswurzeln sind: $1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{n-1}$. Wir müßen zeigen, dass für jede komplexe Zahl z vom Betrag 1 die folgende Gleichung gilt:

$$|z-1|^2 + |z-\varepsilon|^2 + \cdots + |z-\varepsilon^{n-1}|^2 = 2n.$$

Für zwei komplexe Zahlen z, a vom Betrag 1 gilt

$$|z-a|^2 = (z-a)(\overline{z}-\overline{a}) = z\overline{z} - \overline{a}z - a\overline{z} + a\overline{a} = 2 - \overline{a}z - a\overline{z}.$$

Deswegen kann die folgende Summe umgeformt werden zu

$$\sum_{k=0}^{n-1}(2-\varepsilon^k\overline{z}-\varepsilon^{-k}z) = 2n - \overline{z}\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon^k - z\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon^{-k} = 2n.$$

Bei geradem n kann die Aufgabe mit Hilfe des Satzes von Pythagoras gelöst werden: die Strecken zu zwei diametral gelegenen Ecken sind Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks.

Aufgabe 5.
Führe die komplexe Koordinate so ein, dass die Ecken des n-Ecks $1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{n-1}$ sind. Das Produkt aller Seiten und Diagonalen mit 1 als einem der Endpunkten ist gleich $|(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)\cdots(1-\varepsilon^{n-1})|$.

Die Zahlen $1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{n-1}$ sind die Nullstellen des Polynoms $z^n - 1$. Deswegen gilt

$$(z-\varepsilon)(z-\varepsilon^2)\cdots(z-\varepsilon^{n-1}) = \frac{z^n-1}{z-1} = z^{n-1} + \cdots + z + 1.$$

Durch Einsetzen von $z = 1$ erhält man

$$(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)\cdots(1-\varepsilon^{n-1}) = 1 + \cdots + 1 = n.$$

Das Produkt aller Seiten und Diagonalen, die von einer beliebiegen anderen Ecke ausgehen, ist ebenfalls n. Dann ist n^n das Quadrat des Produktes aller Längen (jede Strecke wurde doppelt gezählt). Folglich ist das Produkt aller Längen gleich $\sqrt{n^n}$.

Aufgabe 8. Seien u, v, w und u', v', w' die den Punkten A, B, C und A', B', C' entsprechenden komplexen Zahlen. Dann ist $v' = \frac{1}{2}(u+w)$. Es gilt

$$w' - v = \frac{1+i}{2}(u-v),$$

also

$$w' = \frac{1+i}{2}u + \frac{1-i}{2}v.$$

Analog,

$$u' = \frac{1+i}{2}v + \frac{1-i}{2}w.$$

Daraus folgt

$$w' - v' = \frac{i}{2}u + \frac{1-i}{2}v - \frac{1}{2}w$$
$$u' - v' = -\frac{1}{2}u + \frac{1+i}{2}v - \frac{i}{2}w = i(w' - v'),$$

und das heißt, dass $A'B' = C'B'$ und $\angle A'B'C' = 90^\circ$.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Es ist schwer, die meisten hier gestellten Aufgaben zu ihrer Quelle zurückzuverfolgen. Man kann sie zur mathematischen Folklore zählen.

Aufgaben 3 und 4 sind dem Buch [2] entnommen.

Fast sicher wurde der Satz von Napoleon (Aufgabe 9) nicht von Napoleon erfunden. Zu den möglichen Quellen siehe die englische Wikipedia, Napoleon's Theorem.

Eine gute Einführung in den behandelten Themenkomplex liefert auch [3].

Literatur

[1] Dan Kalman. An elementary proof of Marden's theorem. *The American Mathematical Monthly*, 115(4):330–338, 2008.

[2] Yakov Ponarin. *Algebra komplexer Zahlen in den geometrischen Aufgaben.* Moscow Center of Continuous Mathematical Education (MCCME), 2014. (Auf Russisch).

[3] Isaak Moiseevitch Yaglom. *Complex numbers in geometry.* Academic Press, 1968.