52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Kurs für Internationale „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 7. November 2020

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Theresia Eisenkölbl zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 3. November 2020 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Theresia Eisenkölbl bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 7. November 2020 von 10:00–11:45 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Funktionalungleichungen

Aufgaben

Aufgabe 1. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$xf(y) + yf(x) \leq xy \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ mit

$$(n-1)^2 < f(n)f(f(n)) < n^2 + n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}^*.$$

Aufgabe 3. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, sodass die Ungleichung

$$f(x) + yf(f(x)) \leq x(1 + f(y))$$

für alle positiven ganzen Zahlen x, y gilt.

Aufgabe 4. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, sodass

$$f(x + f(y)) = yf(xy + 1)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt.

Aufgabe 5. Die Menge F enthält die Funktionen $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, die die Gleichung

$$f(3x) \geq f(f(2x)) + x$$

für alle $x > 0$ erfüllen.
Zeige, dass es ein größtes $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $f(x) \geq \alpha x$ für alle $x > 0$ und alle $f \in F$ gilt, und bestimme seinen Wert.

Aufgabe 6. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, sodass

$$2n + 2019 \leq f(f(n)) + f(n) \leq 2n + 2020.$$

Aufgabe 7. Eine Funktion $f : \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{Q}_{>0}$ heiße *gut*, wenn für alle $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ gilt, dass

$$f(x) + f(y) \geq 4f(x + y).$$

a. Zeige, dass für jede gute Funktion und alle $x, y, z \in \mathbb{Q}_{>0}$ gilt, dass

$$f(x) + f(y) + f(z) \geq 8f(x + y + z).$$

b. Kann man 8 durch 9 ersetzen?

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Setze Werte ein, die die Terme vereinfachen oder gleichmachen.

Aufgabe 2. Errate die Antwort und zeige, dass $f(n)$ weder größer noch kleiner sein kann.

Aufgabe 3. Wie bei Funktionalgleichungen ist es oft eine gute Idee, Argumente gleichzusetzen.

Aufgabe 4. Das ist zwar eine Funktionalgleichung, aber durch versuchtes und tatsächliches Gleichsetzen der Argumente erhält man Ungleichungen und eine Gleichung. Danach kann man die Lösung erraten und zeigen, dass die Funktion weder größer noch kleiner sein kann.

Aufgabe 5. Finde ein positives α, das funktioniert, und setze die entsprechende Relation immer wieder in die Funktionalungleichung ein.

Aufgabe 6. Ähnlich zur vorigen Aufgabe kann man $f(n)$ durch Funktionen der Form $an + b$ auf beiden Seiten abschätzen und diese Abschätzung durch wiederholte Anwendung der gegebenen Ungleichungskette verbessern.

Aufgabe 7. Wende die gegebene Ungleichung auf alle möglichen einfachen Arten auf die rechte Seite in **a.** an und addiere alles. Verwende für **b.** die Tatsache, dass eine Funktion gut ist, wenn sie konvex ist und $f(x) = 2f(2x)$ gilt. Finde eine einfache konvexe Funktion mit dieser Eigenschaft und überlege, wie sie verändert werden kann, ohne die Eigenschaften zu verlieren.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Theresia Eisenkölbl, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$xf(y) + yf(x) \leq xy \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Wir setzen $y = 0$ ein, weil damit gleich zwei Terme wegfallen und erhalten

$$xf(0) \leq 0.$$

Da das für positive und negative x gilt, folgt daraus $f(0) = 0$.
Jetzt setzen wir $x = y$ ein, weil damit die beiden Terme auf der linken Seite gleich werden und wir erhalten

$$2xf(x) \leq x^2$$

und damit

$$xf(x) \leq x^2/2.$$

Eine zweite Möglichkeit, den Term $xf(x)$ in der gegebenen Funktionalungleichung zu erhalten, ist es, $y = -x$ einzusetzen. Das ergibt

$$xf(-x) - xf(x) \leq -x^2.$$

Aus den beiden letzten Ungleichungen ergibt sich

$$xf(-x) \leq xf(x) - x^2 \leq x^2/2 - x^2 = -x^2/2.$$

Wenn wir nun x durch $-x$ ersetzen, erhalten wir

$$xf(x) \geq x^2/2.$$

Es gilt somit $xf(x) \leq x^2/2$ und $xf(x) \geq x^2/2$ und damit $xf(x) = x^2/2$. Für $x \neq 0$ können wir durch x dividieren und erhalten $f(x) = x/2$. Zusammen mit $f(0) = 0$ ergibt sich also, dass die Funktion

$$f(x) = x/2$$

die einzige Lösungsmöglichkeit ist.
Man überprüft leicht, dass sie auch wirklich eine Lösung der Ungleichung ist.

Aufgabe 2.

Finde alle Funktionen$f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ mit

$$(n-1)^2 < f(n)f(f(n)) < n^2 + n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}^*.$$

Wir stellen fest, dass $f(n) = n$ eine Lösung ist. Das errät man zum Beispiel durch Ausprobieren einer allgemeinen linearen Funktion.
Wir möchten jetzt zeigen, dass es die einzige Lösung ist. Nehmen wir an, dass m die kleinste natürliche Zahl ist, für die nicht $f(m) = m$ gilt, und betrachten zunächst den Fall $f(m) < m$ d.h. $f(m) \leq m - 1$. Dann gilt wegen der Minimalität von m, dass $f(f(m)) = f(m)$ ist. Somit erhalten wir

$$f(m)f(f(m)) \leq (m-1)f(m) \leq (m-1)^2$$

im Widerspruch zur linken gegebenen Ungleichung.
Betrachten wir nun also den zweiten Fall, dass für dieses minimale m die Ungleichung $f(m) > m$ gilt. Dann gilt wegen $(m+1)f(f(m)) \leq f(m)f(f(m)) < m^2 + m$, dass $f(f(m)) < m$ ist. Somit gilt $f(f(f(m)) = f(f(m))$.
Verwenden wir die gegebene Funktionalungleichung jetzt für $n = f(m)$, erhalten wir

$$(f(m)-1)^2 < f(f(m))f(f(f(m))) = f(f(m))^2 \leq (m-1)^2 < (f(m)-1)^2,$$

was wieder einen Widerspruch ergibt.

Somit ist $f(n) = n$ die einzige Lösung.

Aufgabe 3.

Finde alle Funktionen $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, sodass die Ungleichung

$$f(x) + yf(f(x)) \leq x(1 + f(y))$$

für alle positiven ganzen Zahlen x, y gilt.

Eine Möglichkeit, zwei Argumente gleichzusetzen ist der Wert $y = f(x)$. Das ergibt

$$f(x) + f(x)f(f(x)) \leq x(1 + f(f(x)))$$

und damit

$$(f(x) - x)(f(f(x)) + 1) \leq 0.$$

Da der zweite Faktor offensichtlich positiv ist, folgt daraus also

$$f(x) \leq x.$$

Insbesondere gilt damit $f(1) = 1$.
Setzen wir also $x = 1$ in die gegebene Funktionalungleichung ein und erhalten:

$$1 + y \leq 1 + f(y).$$

Somit gilt also auch

$$f(x) \geq x.$$

Damit ist $f(x) = x$ die einzige Möglichkeit und man überprüft leicht, dass es sich wirklich um eine Lösung handelt.

Aufgabe 4.

Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, sodass

$$f(x + f(y)) = yf(xy + 1)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt.

Wir möchten mit Gleichsetzen der Argumente $x + f(y) = xy + 1$ beginnen. Das ergibt

$$x = \frac{f(y) - 1}{y - 1}.$$

Wenn wir das einsetzen, ergibt sich offensichtlich $1 = y$, was mit dem Nenner im Wert für x nicht kompatibel ist.
Es muss also für jeden Wert von y einen Grund geben, warum man das obige x nicht einsetzen darf. Entweder ist also $y = 1$ oder der ganze Wert ist 0 oder negativ.
Somit gilt $f(y) \leq 1$ für $y > 1$ und $f(y) \geq 1$ für $y < 1$.
Eine relativ einfache positive Funktion auf den positiven Zahlen mit dieser Eigenschaft ist $f(x) = 1/x$. Wir wollen also zeigen, dass das die einzige Funktion ist.
Dazu setzen wir zunächst noch die beiden anderen Argumente gleich, nämlich $y = xy + 1$, also $x = 1 - 1/y$. Das geht nur, wenn $y > 1$ gilt.
Sei also jetzt $y > 1$ und $x = 1 - 1/y$. Dann erhalten wir

$$f(1 - 1/y + f(y)) = yf(y) \text{ für } y > 1.$$

Hier gilt offensichtlich für $f(y) > 1/y$, dass die linke Seite ≤ 1 und die rechte Seite > 1 ist, und für $f(y) < 1/y$, dass die linke Seite ≥ 1 und die rechte Seite < 1 ist. Somit ist $f(y) = 1/y$ für alle $y > 1$.
Wenn wir jetzt also ein beliebiges $y > 1$ in die gegebene Gleichung einsetzen, erhalten wir

$$f(x + 1/y) = y/(xy + 1) = 1/(x + 1/y).$$

Der Ausdruck $x + 1/y$ nimmt aber für geeignete $x > 0$ und $y > 1$ jeden positiven Wert an, somit gilt immer $f(x) = 1/x$.

Man überprüft leicht, dass diese Funktion tatsächlich eine Lösung der Funktionalgleichung ist.

Aufgabe 5.

Die Menge F enthält die Funktionen $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, die die Gleichung

$$f(3x) \geq f(f(2x)) + x \qquad \forall x > 0.$$

erfüllen.
Zeige, dass es ein größtes $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $f(x) \geq \alpha x$ für alle $x > 0$ und alle $f \in F$ gilt, und bestimme seinen Wert.

Da die Funktion nur positive Werte annimmt, gilt

$$f(3x) \geq f(f(2x)) + x > x,$$

also gilt $f(x) \geq x/3$ für alle $x > 0$.
Der Wert $\alpha_0 = 1/3$ erfüllt also die gesuchte Bedingung. Angenommen, wir kennen bereits ein α_n, das die Bedingung erfüllt, dann gilt auch

$$f(3x) \geq f(f(2x)) + x \geq \alpha_n^2 \cdot 2x + x,$$

somit gilt

$$f(x) \geq \frac{2\alpha_n^2 + 1}{3} x.$$

Die Folge $(\alpha_n)_n$ mit $\alpha_0 = 1/3$ und $\alpha_{n+1} = \frac{2\alpha_n^2+1}{3}$ ist somit eine Folge von möglichen Werten für α. Es gilt $\alpha_1 = 11/27 > \alpha_0$ und aus $0 < \alpha_{n-1} < \alpha_n$ folgt $\alpha_{n-1}^2 < \alpha_n^2$ und damit $\alpha_n < \alpha_{n+1}$. Also ist die Folge nach Induktion streng monoton steigend. Sie ist auch beschränkt, da wir zum Beispiel mit der Funktion $f(x) = x$ sehen, dass $\alpha \leq 1$ gelten muss, und wir wollen den Grenzwert α bestimmen, der ebenfalls ein zulässiger Wert ist.
Aus der Rekursionsgleichung folgt

$$\alpha = \frac{2\alpha^2 + 1}{3},$$

was eine quadratische Gleichung mit den Lösungen $1/2$ und 1 ergibt. Da man aber leicht überprüft, dass die Funktion $f(x) = x/2$ in F ist, ist $\alpha = 1$ sicher kein zulässiger Wert und kann damit auch nicht der Grenzwert sein.
Wir haben somit gezeigt, dass der Grenzwert $1/2$ der Folge einen zulässigen Wert für α ergibt und umgekehrt wegen der Funktion $x/2$ kein größerer Wert möglich ist. Somit lautet die Antwort $\alpha = 1/2$.

Aufgabe 6.

Finde alle Funktionen $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, sodass

$$2n + 2019 \leq f(f(n)) + f(n) \leq 2n + 2020.$$

Wir wollen Abschätzungen der Form

$$an + b \leq f(n) \leq cn + d \text{ für alle } n \in \mathbb{N}^*$$

finden und verbessern.
Wenn wir schon eine derartige Ungleichungskette gefunden haben, dann gilt auch

$$2n + 2019 \leq f(f(n) + f(n) \leq cf(n) + d + f(n) = (c+1)f(n) + d$$

und damit

$$2n/(c+1) + (2019 - d)/(c+1) \leq f(n).$$

Analog erhält man

$$(a+1)f(n) + b \leq f(f(n)) + f(n) \leq 2n + 2020$$

und damit

$$f(n) \leq 2n/(a+1) + (2020 - b)/(a+1).$$

Wir erhalten also aus den Koeffizienten (a, b, c, d) die Koeffizienten $(2/(c+1), (2019-d)/(c+1), 2/(a+1), (2020-b)/(a+1)$ und im nächsten Schritt

$$(2(a+1)/(a+3), \dots, 2(c+1)/(c+3), \dots).$$

Offensichtlich gilt $0 \cdot n + 1 \leq f(n) < f(f(n)) + f(n) \leq 2n + 2020$.
Wir betrachten also für a die Folge $a_0 = 0$ und

$$a_n = 2(a_{n-1} + 1)/(a_{n-1} + 3) = 2 - 4/(a_{n-1} + 3),$$

was offensichtlich monoton steigend und durch 2 beschränkt ist.
Der Grenzwert ist eine Lösung von

$$a = 2(a + 1)/(a + 3),$$

was die Lösungen $a = 1$ und $a = -2$ hat. Da der Grenzwert positiv sein muss, kommt also nur $a = 1$ in Frage.
Analog sieht man, dass der Grenzwert der Werte für c ebenfalls 1 ergibt. In ähnlicher Weise erhält man, dass der Grenzwert für b den Wert $673 - 1/3$ und für d den Wert $673 + 2/3$ annimmt.
Es gilt also, dass

$$n + 673 - 1/3 \leq f(n) \leq n + 673 + 2/3$$

für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gilt.
Da die Funktion aber nur ganze Werte annimmt, muss $f(n) = n + 673$ gelten.
Man überprüft leicht, dass das wirklich eine Lösung der gegebenen Ungleichungskette ist.

Aufgabe 7.

Eine Funktion $f : \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{Q}_{>0}$ heiße *gut*, wenn für alle $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ gilt, dass

$$f(x) + f(y) \geq 4f(x + y).$$

a. Zeige, dass für jede gute Funktion und $x, y, z \in \mathbb{Q}_{>0}$ gilt, dass

$$f(x) + f(y) + f(z) \geq 8f(x + y + z).$$

b. Kann man 8 durch 9 ersetzen?

a. Es gilt für eine gute Funktion f durch zweimalige Anwendung der gegebenen Ungleichung, dass $16f(x+y+z) \leq 4(f(x)+f(y+z)) = 4f(x)+f(y)+f(z)$. Addiert man die drei zyklischen Varianten dieser Ungleichung, erhält man

$$48f(x+y+z) \leq 6(f(x)+f(y)+f(z))$$

und damit die gewünschte Ungleichung.
b. Nein. Um ein Gegenbeispiel zu konstruieren, stellen wir zuerst fest, dass eine konvexe Funktion mit der Eigenschaft $f(x) = 2f(2x)$ immer gut ist, da dann

$$4f(x+y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq 2 \cdot \frac{f(x)+f(y)}{2} = f(x)+f(y)$$

gilt.
Offensichtlich ist $f(x) = 1/x$ eine solche Funktion, für die aber die gewünschte Ungleichung sowohl mit dem Koeffizienten 8 als auch mit dem Koeffizienten 9 gilt. Wir ändern die Funktion daher so zu einer neuen Funktion g ab, dass $g(2^k) = f(2^k)$ für alle ganzzahligen k und die Funktion g zwischen diesen Werten linear verläuft. Das ist offensichtlich noch immer eine konvexe Funktion und auch die andere Eigenschaft bleibt wegen der Linearität erhalten. Somit ist g eine gute Funktion mit $g(1) = 1$. Es gilt aber ganz sicher $g(3) > f(3) = 1/3$, da die Strecke zwischen $f(2)$ und $f(4)$ sicher über dem Funktionsgraphen von f liegt. Somit gilt

$$g(1)+g(1)+g(1) = 3 = 9f(3) < 9g(3)$$

und g ist somit ein Gegenbeispiel zur Ungleichung mit Koeffizient 9.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

Quelle unbekannt, bearbeitet von Theresia Eisenkölbl

Aufgabe 2.

siehe [2, 2015, Problem 1], übersetzt und bearbeitet von Theresia Eisenkölbl

Aufgabe 3.

siehe [3, 2017, Senior Problem 1], übersetzt und bearbeitet von Theresia Eisenkölbl

Aufgabe 4.

siehe [4, 2012], übersetzt und bearbeitet von Theresia Eisenkölbl

Aufgabe 5.

siehe [6, Problem 58], übersetzt und bearbeitet von Theresia Eisenkölbl

Aufgabe 6.

siehe [5, vol. 7 #5], übersetzt und bearbeitet von Theresia Eisenkölbl.

Aufgabe 7.

siehe [1, 2011, Aufgabe 3]

Literatur

[1] Archivierte Aufgaben und Lösungen der IMO-team Selektion der Deutschen Mathematik-Olympiade ab 2002. https://www.mathe-wettbewerbe.de/imo/imo-auswahl-aufgabenarchiv. (aufgerufen am 10.11.2020).

[2] Canadian Mathematical Olympiad. https://cms.math.ca/competitions/cmo/. (aufgerufen am 10.11.2020).

[3] European Mathematical Cup. http://emc.mnm.hr/history/. (aufgerufen am 10.11.2020).

[4] Liste aller Mitteleuropäischen Mathematik Olympiade-Wettbewerben (MEMO). https://memo-official.org/MEMO/contests/previous/. (aufgerufen am 10.11.2020).

[5] Mathematical Excalibur - Online Newsletter. https://www.math.ust.hk/excalibur/. (aufgerufen am 10.11.2020).

[6] Frank Wikström, Victor Ufnarovski, and Jana Madjarova. *Mathematical buffet.* Studentlitteratur AB, 2016.