52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Kurs für Internationale „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 28. November 2020

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Karl Czakler zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 24. November 2020 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Karl Czakler bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 28. November 2020 von 10:00–11:45 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1. Es seien x, y, z nicht negative reelle Zahlen mit $xy + z + zx + 2xyz = 1$. Beweise:

$$4x + y + z \geq 2.$$

Wann gilt Gleichheit ?

Aufgabe 2. Es seien x, y und z paarweise verschiedene positive ganze Zahlen. Beweise:

$$(x + y + z)(xy + xz + zx - 2) \geq 9xyz.$$

Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 3. Es seien a, b und c paarweise verschiedene positive ganze Zahlen. Beweise:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 18.$$

Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 4. Es sei $n \geqslant 2$ eine positive natürliche Zahl und $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reelle Zahlen mit

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0.$$

Eine Menge A ist definiert durch

$$A = \{(i, j) \,|\, 1 \leq i < j \leq n, |a_i - a_j| \geq 1\}.$$

Beweise, dass

$$\sum_{(i,j) \in A} a_i a_j < 0$$

gilt, wenn A nicht leer ist.

Aufgabe 5. Seien $b_1, \dots , b_n$ nicht negative reelle Zahlen mit der Summe 2 und $a_0, a_1, \dots , a_n$ positive reelle Zahlen mit $a_0 = a_n = 0$ und $|a_i - a_{i-1}| \leq b_i$ für jedes $i = 1, \dots , n$. Beweise:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + a_{i-1})b_i \leq 2.$$

Aufgabe 6. Es seien a, b, c, d nicht negative reelle Zahlen mit $a + b + c + d = 4$. Bestimme das Minimum von

$$\frac{a}{b^3+4} + \frac{b}{c^3+4} + \frac{c}{d^3+4} + \frac{d}{a^3+4}.$$

Aufgabe 7. Es seien $x_1, x_2, \cdots , x_n$ positive reelle Zahlen mit $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$. Zeige, dass es zu jeder natürlichen Zahl $k \geq 2$ ganze Zahlen $a_1, a_2, \cdots , a_n$ mit $\mid a_i \mid \leq k - 1,\ i = 1, 2, \cdots , n$, gibt (wobei nicht alle a_i gleich Null sind), die die folgende Ungleichung erfüllen:

$$\mid a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n \mid \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}.$$

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Versuche die Nebenbedingung umzuformen, oder geignet zu subsstituieren,.

Aufgabe 2: Nütze die Symmetrie der Ungleichung!

Aufgabe 3: Verwende die elementarsmmetrischen Polynome

Aufgabe 4: Beachte:

$$\sum_{1\le i,j\le n} a_i a_j = \left(\sum a_i\right)^2 = 0.$$

Die Summe über alle Paare (i,j) ist also gleich Null. Es sei nun T die Menge aller Paare (i,j) mit $|a_i - a_j| < 1$ (dazu gehören auch alle Paare (i,i)), dann genügt es daher

$$\sum_{(i,j)\in T} a_i a_j \ge 0,$$

zu zeigen. Diese Ungleichung kann man nun leicht verschärfen.

Aufgabe 5: Zeige zunächst

$$a_j \le \sum_{k=1}^{j} b_k$$

und

$$a_j \le \sum_{k=j}^{n-1} b_{k+1}.$$

Damit kann man die linke Seite der Ungleichung nach oben abschätzen. Überlege nun welche a_j du mit der ersten und welche du mit der zweiten Ungleichung abschätzt!

Aufgabe 6: Es gilt $\frac{a}{b^3+4} = a \cdot \frac{1}{b^3+4}$. Betrachte die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{x^3+4}.$$

Kann man hier eine vernünftige Abschätzung (nach unten) finden?

Aufgabe 7: Mit der QM-AM- Mittelungleichung erhält man

$$\sqrt{n} \ge x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

. Betrachte nun alle möglichen Summen

$$b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n \quad \text{mit} \quad b_i \in \{0,1,2,\ldots,k-1\}.$$

Wie viele gibt es?

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Wir setzen $y + z = a$ und $yz = b$. Dann gilt

$$x = \frac{1-b}{a+2b} \quad (a + 2b \neq 0!).$$

Wenn $a \geq 2$ ist, dann gilt $4x + a \geq 2$ und die Ungleichung ist gezeigt. Sei also im Folgenden $a < 2$. Dann haben wir

$$4 \cdot \frac{1-b}{a+2b} + a \geq 2$$

zu zeigen. Das ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} 4 - 4b + a^2 + 2ab &\geq 2a + 4b \\ a^2 - 4b + 4 - 4b + 2ab - 2a &\geq 0 \\ a^2 - 4b + 4(1-b) - 2a(1-b) &\geq 0 \\ a^2 - 4b + 2(1-b)(2-a) &\geq 0 \end{aligned}$$

Das ist aber richtig, da $a^2 - 4b = (y+z)^2 - 4yz = (y-z)^2 \geq 0$, $b = yz \leq \frac{(y+z)^2}{4} = \frac{a^2}{4} < 1$ und $a < 2$.
Gleichheit gilt für $y = z$ und $a = 2$. Das führt auf das Tripel $(0, 1, 1)$.

Andere Lösungsmöglichkeit:
Es gilt:

$$xy + yz + zx + 2xyz = 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 2.$$

Mit Cauchy folgt dann

$$2 = \frac{4}{4(x+1)} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \geq \frac{(2+1+1)^2}{4x+y+z+6}.$$

Es gilt daher

$$2(4x + y + z + 6) \geq 16,$$

also

$$4x + y + z \geq 2.$$

Bemerkung:
Auch die Substitution $x = \frac{a}{b+c}, y = \frac{b}{c+a}$ und $z = \frac{c}{a+b}$ führt zum Erfolg.
Aufgabe 2.

Folgende Ungleichungen sind zur gegebenen Ungleichung äquivalent:

$$\begin{aligned} (x+y+z)(xy+yz+zx) - 9xyz &\geq 2(x+y+z) \\ x(y-z)^2 + y(x-z)^2 + z(x-y)^2 &\geq 2(x+y+z) \\ x(y-z)(y-z) + y(x-z)(x-z) + z(x-y)(x-y) &\geq 2(x+y+z). \end{aligned}$$

Wir können o.B.d.A. $x > y > z > 0$ voraussetzen. Dann gilt $x - y \geq 1$, $x - z \geq 2$ und $y - z \geq 1$ und es genügt daher

$$x(y - z) + 2(x - z) + z(x - y) \geq 2(x + y + z)$$

zu zeigen. Das ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} xy - xz + 2yx - 2yz + xz - yz - 2x - 2y - 2z &\geq 0 \\ 3yx - 3yz - 2x - 2y - 2z &\geq 0 \\ (3y - 2)(x - z) - (2y + 4z) &\geq 0 \end{aligned}$$

Wir verschärfen die Ungleichung noch einmal mit $x - z \geq 2$ und haben

$$2(3y - 2) - 2y - 4z \geq 0$$

also

$$4(y - z - 1) \geq 0$$

zu zeigen. Das ist aber wegen $y - z \geq 1$ richtig und die Ungleichung ist bewiesen.
Gleichheit gilt für alle Tripel $(t + 2, t + 1, t)$ samt Permutationen mit t positiv und ganz.

Aufgabe 3.

Klarerweise gilt

$$a + b + c \geq 6.$$

Da a,b, c verschiedene ganze Zahlen sind, folgt

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 6.$$

Bezeichnet man mit $p = x + y + z, q = xy + yz + zx$ und $r = xyz$ die elementarsymmetrischen Polynome in drei Variablen, dann kann man die linke Seite der Ungleichung folgendermaßen anschreiben:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 18abc = p^3 - 3pq + 3r - 3r = p(p^2 - 3pq) = \frac{1}{2}p(2p^2 - 6pq).$$

Daher haben wir

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)\Big((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\Big) \geq \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18,$$

und alles ist gezeigt. Gleichheit gilt für das Tripel (1, 2, 3) samt allen Permutationen
Aufgabe 4.

Wir können $a_i \neq 0, i \in [1..n]$ voraussetzen. (Man kann alle Zahlen $a_i = 0$ weglassen, das ändert nichts.) Es sei

$$A^* := \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq n, |a_i - a_j| \geq 1\}.$$

Mit $(i, j) \in A^*$ ist dann auch $(j, i) \in A^*$. Wenn wir die Ungleichung für A^* beweisen können, dann haben wir sie klarerweise auch für A gezeigt. Weiters sei nun

$$B^* := \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq n, |a_i - a_j| < 1\}.$$

Mit $(i,j) \in B^*$ ist dann auch $(j,i) \in B^*$ und auch die Paare (i,i) gehören zu B^*. Es gilt nun

$$0 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{\substack{(i,j)\in A^* \\ |a_i-a_j|\geq 1}} a_i a_j + \sum_{\substack{(i,j)\in B^* \\ |a_i-a_j|<1}} a_i a_j.$$

Es genügt daher

$$\sum_{\substack{(i,j)\in B^* \\ |a_i-a_j|<1}} a_i a_j > 0 \quad (1)$$

zu zeigen.
Es sei nun $|a_i| \geq 1$. Dann gilt für alle a_j mit $|a_i - a_j| \leq 1$, dass a_i und a_j dasselbe Vorzeichen haben, also $a_i a_j > 0$. Wenn wir diese Produkte daher weglassen verschärfen wir die Ungleichung (1). Sind daher $\{c_1, c_2, \ldots c_k\}$ alle Zahlen von $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ mit $|a_i| < 1, i \in \{1, 2 \ldots, n\}$, genügt es

$$\sum_{\substack{1\leq i.j\leq k \\ |c_i-c_j|<1}} c_i c_j > 0$$

zeigen. Sind nun c_i und c_j zwei Zahlen mit $|c_i - c_j| \geq 1$, dann haben c_i und c_j verschiedene Vorzeichen und es gilt

$$\sum_{\substack{1\leq i,j\leq k \\ |c_i-c_j|\geq 1}} c_i c_j < 0.$$

Daher haben wir

$$\sum_{\substack{1\leq i,j\leq k \\ |c_i-c_j|<1}} c_i c_j = \left(\sum_{i=1}^{k} c_i\right)^2 - \sum_{\substack{1\leq i,j\leq k \\ |c_i-c_j|\geq 1}} c_i c_j > 0.$$

Damit ist aber alles gezeigt.

Aufgabe 5.

Seien $b_1, \ldots, b_n$ nicht negative reelle Zahlen mit der Summe 2 und $a_0, a_1, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen mit $a_0 = a_n = 0$ und $|a_i - a_{i-1}| \leq b_i$ für jedes $i = 1, \ldots, n$. Beweise:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + a_{i-1}) b_i \leq 2.$$

Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{j} b_k \geq |a_1 - a_0| + |a_2 - a_1| + \cdots + |a_j - a_{j-1}| \geq |a_1 - a_0 + a_2 - a_1 + \cdots + a_j - a_{j-1}| = a_j$$

und

$$\sum_{k=j}^{n-1} b_{k+1} \geq |a_{j+1} - a_j| + |a_{j+2} - a_{j+1}| + \cdots + |a_n - a_{n-1}| \geq |a_{j+1} - a_j + a_{j+2} - a_{j+1} + \cdots + a_n - a_{n-1}| = a_j.$$

Wir bezeichnen mit x_j die Summe $\sum_{k=1}^{j} b_k$ für $j = 1, 2, \ldots, n$ und setzen $x_0 = 0$. und mit y_j die Summe $\sum_{k=j}^{n-1} b_{k+1}$ für $j = 0, 1, 2, \ldots n-1$ und setzen $y_n = 0$. Zusammenfassend haben wir daher:

- $x_j = \sum_{k=1}^{j} b_k \geq a_j$ für $j = 1, 2, \cdots n$ und $x_0 = 0$
- $y_j = \sum_{k=j}^{n-1} b_{k+1} \geq a_j$ für $j = 0, 1, 2, \ldots n-1$ und $y_n = 0$.
- $x_j + y_j = 2$ für $j = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Da die Folge der x_i ist monoton wachsend ist und $x_n = 2$ gilt, gibt es einen kleinsten Index k mit $k = 1, 2, \ldots n$ für den $x_k \geq 1$ gilt.
Dann gilt

$$x_i \quad \begin{cases} < 1 & \text{für } i = 1, 2, \ldots k-1 \\ \geq 1 & \text{für } i = k, k+1, \ldots, n \end{cases}$$

und

$$y_i \quad \begin{cases} \geq 1 & \text{für } i = 1, 2, \ldots k-1 \\ < 1 & \text{für } i = k, k+1, \ldots, n. \end{cases}$$

Wir schätzen nun die linke Seite der Ungleichung wie folgt ab.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(a_i + a_{i-1})b_i &= \sum_{i=1}^{k-1}(a_i + a_{i-1})b_i + (a_k + a_{k-1})b_k + \sum_{i=k+1}^{n}(a_i + a_{i-1})b_i \\
&\leq \sum_{i=1}^{k-1}(x_i + x_{i-1})b_i + (y_k + x_{k-1})b_k + \sum_{i=k+1}^{n}(y_i + y_{i-1})b_i \\
&= \sum_{i=1}^{k-1}(2b_1 + 2b_2 + \cdots + 2b_{i-1} + b_i)b_i + (y_k + x_{k-1})b_k + \sum_{i=k+1}^{n}(b_i + 2b_{i+1} + \cdots + 2b_n)b_i \\
&= \Big(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} b_i\Big)^2 - 2(b_1 + b_2 + \cdots + b_{k-1})(b_{k+1} + b_{k+2} + \cdots + b_n) + (y_k + x_{k-1})b_k.
\end{aligned}$$

Wir haben also

$$(x_{k-1} + y_k)^2 - 2x_{k-1}y_k + (y_k + x_{k-1})b_k \leq 2$$

zu zeigen. Das ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}
(x_{k-1} + y_k)(x_{k-1} + y_k + b_k) - 2x_{k-1}y_k &\leq 2 \\
(x_{k-1} + y_k) \cdot 2 - 2x_{k-1}y_k &\leq 2 \\
x_{k-1}y_k - x_{k-1} - y_k + 1 &\leq 2 \\
(1 - x_{k-1})(1 - y_k) &\leq 0.
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist richtig, da $x_{k-1} < 1$ und $y_k \geq 1$ gilt.

Aufgabe 6.

Es seien a, b, c, d nicht negative reelle Zahlen mit $a + b + c + d = 4$. Bestimme das Minimum von

$$\frac{a}{b^3+4} + \frac{b}{c^3+4} + \frac{c}{d^3+4} + \frac{d}{a^3+4}.$$

Wir suchen das Minimum von

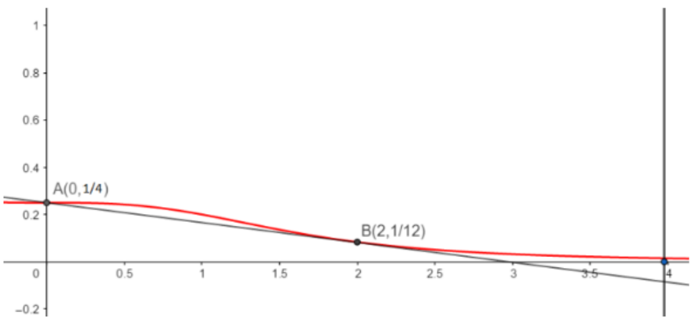
$$a\frac{1}{b^3+4} + b\frac{1}{c^3+4} + c\frac{1}{d^3+4} + d\frac{1}{a^3+4}.$$

Wir betrachten die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^3+4}$. Die Tangente t an den Graphen von f an der Stelle $x = 2$ hat die Gleichung

$$t : y = \frac{1}{4} - \frac{x}{12}.$$

Wir zeigen nun, dass der Graph der Funktion f für $x \geq 0$ oberhalb der Geraden g liegt, also

$$\frac{1}{x^3+4} \geq \frac{1}{4} - \frac{x}{12}.$$



Das ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} 12 &\geq 3x^3 + 12 - x^4 - 4x \\ x(x^3 - 3x^2 + 4) &\geq 0 \\ x(x-2)^2(x+1) &\geq 0, \end{aligned}$$

also richtig. Es gilt daher

$$\begin{aligned} a\frac{1}{b^3+4} + b\frac{1}{c^3+4} + c\frac{1}{d^3+4} + d\frac{1}{a^3+4} &\geq \\ a\Big(\frac{1}{4} - \frac{a}{12}\Big) + b\Big(\frac{1}{4} - \frac{b}{12}\Big) + c\Big(\frac{1}{4} - \frac{c}{12}\Big) + d\Big(\frac{1}{4} - \frac{d}{12}\Big) &= \\ \frac{a+b+c+d}{4} - \frac{ab+bc+cd+da}{12} &= \\ 1 - \frac{ab+bc+cd+da}{12} \geq 1 - \frac{4}{12} &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Dabei wurde

$$ab + bc + cd + da = (a+c)(b+d) \leq \frac{(a+b+c+d)^2}{4} = 4$$

verwendet. Gleichheit gilt für $a + c = b + d$, $a + b + c + d = 4$ also $a + c = 2$ und $b + d = 2$. Da weiters nur Gleichheit eintritt, wenn eine Variable gleich 0 oder 2 ist, haben wir folgende Quadrupel als mögliche Gleichheitsfälle:

$$(2, 2, 0, 0); (2, 0, 0, 2); (0, 2, 2, 0); (0, 0, 2, 2).$$

Aufgabe 7.

Mit der QM-AM Mittelungleichung folgt:

$$\sqrt{n} \geq x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

Es seien nun alle x_i fest und wir betrachten für $k \geq 2$ die Summen

$$\sum_{i=1}^{n} b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n \quad \text{mit} \quad b_i \in \{0, 1, 2, 3, \cdots, k-1\} \ \text{ für alle } \ i = 1, 2, \cdots, n$$

Das sind insgesamt k^n Summen (eine ist gleich 0) und für jede dieser Summen gilt

$$\sum_{i=1}^{n} b_i x_i \leq (k-1)\sqrt{n}.$$

Wir teilen nun das Intervall $[0; (k-1)\sqrt{n}]$ in $k^n - 1$ Teilintervalle mit der Länge

$$\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}$$

.

Da es k^n Summen gibt, müssen nach dem Schubfachprinzip zwei Summen S, S' in demselben Teilintervall liegen. Es gilt dann:

$$\mid S - S' \mid = \mid \sum_{i=1}^{n} (b_i - b_i')x_i \mid = \mid \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \mid \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}$$

mit $\mid a_i \mid = \mid b_i - b_i' \mid \leq k - 1$. Damit ist aber alles gezeigt.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

[1, Team Selection Test Israel 2016]

Aufgabe 2.

[1, Junior Balkan Math Olympiad 2017]

Aufgabe 3.

[3, inequalities]

Aufgabe 4.

[2, IMO Shortlist 2019], eine englischsprachige Lösung kann bei [4, Category: Inequalities] nachgelesen werden.

Aufgabe 5.

[4, Category: Inequalities, Bulgarien 2020].
Aufgabe 6.

[4, Category: Inequalities, USAMO 2017].
Aufgabe 7.

[2, IMO 1987]

Literatur

[1] Art of Problem Solving. `https://artofproblemsolving.com/community`. (aufgerufen am 30.11.2020).

[2] Internationale Mathematik-Olympiade. `https://www.imo-official.org/problems.aspx`. Alle IMO - Angaben und die meisten IMO-Shortlists vergangener Jahre (aufgerufen am 30.11.2020).

[3] Alexander Bogomolny. Cut-the-Knot. `http://www.cut-the-knot.org/`. (aufgerufen am 30.11.2020).

[4] Dragomir Grozev. Dragomir Grozev's Math Blog. `https://dgrozev.wordpress.com/author/dgrozev/`. (aufgerufen am 30.11.2020).