52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Kurs für Internationale „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 19. Dezember 2020

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Veronika Schreitter zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 15. Dezember 2020 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Veronika Schreitter bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 19. Dezember 2020 von 10:00–11:45 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Kombinatorik

Aufgaben

Aufgabe 1. Alle positiven Teiler eine positiven ganzen Zahl N stehen an einer Tafel. Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel, bei dem sie abwechselnd ziehen. Im ersten Zug löscht Spieler A die Zahl N. Wenn die zuletzt gelöschte Zahl d war, dann löscht der nächste Spieler entweder einen Teiler oder ein Vielfaches von d. Der Spieler, der keinen Zug mehr machen kann, verliert.
Man bestimme alle Zahlen N, für die der Spieler A immer gewinnen kann, unabhängig davon, wie B zieht.

Aufgabe 2. Sei n eine positive ganze Zahl. Auf einem Spielbrett, das aus $4n \times 4n$ Quadraten besteht, werden genau $4n$ Spielsteine so platziert, dass sich in jeder Zeile und jeder Spalte einen Spielstein befindet. In einem Zug wird ein Spielstein horizontal oder vertikal auf ein benachbartes Quadrat bewegt. Mehrere Spielsteine dürfen sich gleichzeitig auf demselben Quadrat befinden. Die Spielsteine sollen so bewegt werden, dass sie alle Felder einer der beiden Diagonalen belegen.
Man bestimme die kleinste Zahl $k(n)$ derart, dass dies für jede Ausgangssituation in höchstens $k(n)$ Zügen möglich ist.

Aufgabe 3. Sei $p > 2$ eine Primzahl. Für eine Permutation $\pi = (\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(p))$ der Menge $S = \{1, 2, \ldots, p\}$ sei $f(\pi)$ die Anzahl der Vielfachen von p unter den folgenden p Zahlen:

$$\pi(1), \pi(1) + \pi(2), \ldots, \pi(1) + \pi(2) + \cdots + \pi(p)$$

Bestimme den Mittelwert von $f(\pi)$, berechnet über alle Permutationen π von S.

Aufgabe 4. 1000 Kinder stehen in einem Kreis.
Beweise, dass eine ganze Zahl k mit $100 \leq k \leq 300$ existiert, sodass es in diesem Kreis eine zusammenhängende Gruppe von $2k$ Kinder gibt, in der die erste Hälfte dieselbe Anzahl an Mädchen enthält wie die zweite.

Aufgabe 5. Gegeben sei eine ganze Zahl $N \geq 2$. Eine Gruppe von $N(N+1)$ Fußballspielern, von denen keine zwei gleich groß sind, steht in einer Reihe. Pelé möchte $N(N-1)$ Spieler so aus dieser Reihe entfernen, dass eine neue Reihe von $2N$ Spielern verbleibt, in der die folgenden N Bedingungen gelten:

(1) Niemand steht zwischen den beiden größten Spielern.

(2) Niemand steht zwischen dem drittgrößten und dem viertgrößten Spieler.

$\vdots$

(N) Niemand steht zwischen den beiden kleinsten Spielern.

Man zeige, dass dies immer möglich ist.

Aufgabe 6. In jeder Ecke eines regelmäßigen n-Ecks steht eine Burg. Im gleichen Moment schießt jede Burg auf eine der beiden nächstgelegenen Burgen (und trifft). Das *Ergebnis des Schießens* ist die Menge der getroffenen Burgen. Wir unterscheiden nicht, ob eine Burg ein- oder zweimal getroffen wurde. Sei $P(n)$ die Anzahl der möglichen Ergebnisse des Schießens. Man zeige, dass für jede positive ganze Zahl $k \geq 3$ die Zahlen $P(k)$ und $P(k+1)$ teilerfremd sind.

Anmerkung: Die Menge der getroffenen Burgen ist nicht nur die Anzahl der getroffenen Burgen, sondern es kommt auch darauf an, welche Burgen getroffen wurden. Beispielsweise gibt es für $n = 3$ mit Burgen A, B und C folgende mögliche Ergebnisse: $\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{A, B, C\}$. Also gilt $P(3) = 4$.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Wenn N genau zwei Primteiler hat, also $N = p^k q^l$, kann man das Spiel auf einem $(k+1) \times (l+1)$-Rechteck spielen, wobei das Feld in der i-ten Zeile und j-ten Spalte der Zahl $p^i q^j$ entspricht.

Aufgabe 2. Finde eine möglichst einfache Art, in einer gegebenen Position herauszufinden, wie viele Züge man höchstens benötigt, um alle Steine auf eine vorgegebene Diagonale zu bringen.

Aufgabe 3. Sei $f_k(\pi)$ die Anzahl der Vielfachen von p unter $\pi(1)+\pi(2)+\cdots+\pi(k)$. (Also $f_k(\pi) = 0$ oder $f_k(\pi) = 1$.) Zeige, dass für alle $k < p$ der Mittelwert von $f_k(\pi)$ über alle Permutationen π von S genau $\frac{1}{p}$ ist.

Aufgabe 4. Zeige: Wenn es keine zusammenhängende Gruppe von 600 Kinder gibt, sodass gleich viele Mädchen in der ersten und in der zweiten Hälfte sind, so gibt es zwei zusammenhängende Gruppen von 600 Kindern, die nur um ein Kind versetzt sind, sodass gilt: In der einen Gruppe ist in der ersten Hälfte ein Mädchen mehr als in der zweiten Hälfte und in der anderen Gruppe ist in der ersten Hälfte ein Mädchen weniger als in der zweiten Hälfte.

Aufgabe 5. Teile die Fußballspieler in N Gruppen auf: Gruppe A besteht aus den $N+1$ größten Spielern, Gruppe B aus den $N+1$ nächstgrößeren Spielern etc. Zeige, dass man $N(N-1)$ Spieler so entfernen kann, dass genau 2 Spieler aus jeder Gruppe übrigbleiben und diese jeweils nebeneinander stehen.

Aufgabe 6. Sei $K(n)$ die Anzahl an Mengen, die von einem regelmäßigen n-Eck von je zwei benachbarten Ecken mindestens eine enthalten. Zeige:

1. $P(2l) = K(l)^2$ und $P(2l+1) = K(2l+1)$
2. $K(l) = K(l-1) + K(l-2)$
3. $K(2l+1)$ ist zu $K(l)$ und $K(l+1)$ teilerfremd.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Veronika Schreitter, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Antwort: Spieler A hat genau dann eine Gewinnstrategie, wenn N eine Quadratzahl ist.

Wir zeigen zuerst, dass Spieler B eine Gewinnstrategie hat, falls N keine Quadratzahl ist:
Wenn N keine Quadratzahl ist, muss es einen Primteiler p von N geben, der in ungerader Vielfachheit in N vorkommt. Wir können nun je zwei Teiler von N einander zuordnen, indem wir die folgenden Paare bilden: $(p^{2k}x,\, p^{2k+1}x)$, wobei k eine natürliche Zahl und x ein zu p teilerfremder Teiler von N sind. Dann kommt offensichtlich jeder Teiler von N in genau einem Paar vor. Spieler B hat nun folgende Gewinnstrategie: Auf eine Zahl von A antwortet B immer mit der zweiten Zahl des Paares. Das ist offensichtlich immer ein erlaubter Zug. Dadurch kann B immer einen weiteren Zug machen, nachdem A gezogen hat, und gewinnt somit.
Wir zeigen nun, dass Spieler A eine Gewinnstrategie hat, falls N eine Quadratzahl ist:
Die Gewinnstrategie von A folgt dem gleichen Prinzip wie die vorherige Strategie von B: Spieler A teilt die Zahlen in Paare auf, lässt aber die von ihm gesagte Anfangszahl dabei weg, und antwortet auf eine Zahl von B immer mit der zweiten Zahl des Paares. Die Aufteilung ist allerdings diesmal etwas schwieriger. Wir machen eine Induktion nach der Anzahl an verschiedenen Primteilern in N. Man beachte, dass jetzt die Vielfachheit jedes Primteilers in N gerade ist.
Induktionsanfang: N hat nur einen Primteiler, also $N = p^{2k}$ für eine Primzahl p und eine natürliche Zahl k. Wir bilden die Paare $(p^{2i},\, p^{2i+1})$ für alle $i < k$.
Induktionsschritt: Sei $N = p^{2k}x$ mit x teilerfremd zu p und laut Induktionvoraussetzung können wir alle Teiler von x außer x selbst in Paare aufteilen (die die geforderte Bedingung, dass ein Element des Paares das andere teilt, erfüllen). Wir übernehmen diese Paare. Die restlichen Teiler von N, die ja nun durch p teilbar sind, paaren wir folgendermaßen: $(p^{2i+1}y,\, p^{2i+2}y)$ für $i < k$. Diese Aufteilung hat jetzt noch ein Problem: Das Element x hat keinen Partner, dafür ist das Element N mit N/p gepaart. Wir lösen das, indem wir stattdessen x mit N/p paaren. Damit haben wir eine korrekte Paarung für N gefunden.

Aufgabe 2.

Antwort: $k(n) = 6n^2$

Wir bemerken zuerst: Wenn ein Stein in horizontaler Richtung k Schritte von einer gegebenen Diagonale entfernt ist, dann ist er auch in vertikaler Richtung k Schritte von dieser Diagonalen entfernt und auch von jedem Stein der Diagonalen, der zwischen diesen beiden Steinen, die er horizontal und vertikal erreicht, liegt, ist er genau k Schritte entfernt. Da in jeder Zeile genau ein Stein ist, kann man sich also darauf beschränken, die Steine z.B. horizontal zu bewegen und dabei wird das Minimum an Zügen benötigt.
Wir zeigen nun, dass man immer mit $6n^2$ Zügen alle Steine auf eine Diagonale bekommen kann:
Sei A die Summe der horizontalen bzw. vertikalen Abstände der Steine zu einer der Diagonalen und B die Summe der horizontalen bzw. vertikalen Abstände der Steine zur anderen Diagonale. Sei $S = A + B$. Wir werden zeigen, dass $S \leq 12n^2$ gilt, woraus $A \leq 6n^2$ oder $B \leq 6n^2$ folgt, womit die Sache bewiesen wäre.
Sei s die Summe der horizontalen bzw. vertikalen Abstände eines betrachteten Steins zu den beiden Diagonalen. Wir teilen das Quadrat in Ringe auf: Ring 1 besteht aus allen Feldern, die den Rand des Spielbretts berühren. Ring 2 besteht aus den nächstinneren Feldern, also aus allen Feldern, die

ein Feld von Ring 1 berühren. Und so weiter. Schließlich besteht Ring $2n$ aus den vier mittleren Feldern des Spielfelds. Da die Eckpunkte dieser Ringe nun genau die Diagonalfelder sind und Ring k die Seitenlänge $4n-2k+2$ hat, sehen wir, das für einen Stein im Ring k gilt: $s = 4n-2k+1$. Also wird s kleiner, je weiter innen der Stein ist. Wegen der Bedingung, dass in jeder Zeile und jeder Spalte nur ein Stein ist, können allerdings immer nur 4 Steine im selben Ring sein. Daher finden wir für+S folgende Obergrenze:

$$4(4n-2\cdot 1+1)+4(4n-2\cdot 2+1)+\cdots+4(4n-2\cdot n+1) = 16n^2-4(1+3+\cdots+2n-1) =$$
$$=16n^2-4\frac{(2n)n}{2} = 16n^2-4n^2 = 12n^2$$

Damit haben wir wie gewünscht $S \leq 12n^2$ bewiesen.
Wir beschreiben nun eine Konfiguration, für die die maximale Anzahl an Zügen tatsächlich $6n^2$ ist: Dafür verwenden wir unser gerade eben erworbenes Wissen. Wir suchen also eine Konfiguration, in der in jedem der n äußersten Ringe jeweils 4 Steine sind und in der $A = B$ gilt. Das erreichen wir folgendermaßen: Wir teilen das Spielbrett in 16 Felder der Größe $n \times n$ auf. Wenn diese 16 Felder mit Koordinaten (1, 1) bis (4, 4) bezeichnet sind, wählen wir die Felder (1, 2), (2, 4), $(3,1)$ und (4, 3) aus. In jedem dieser Felder belegen wir genau eine Diagonale mit Steinen, und zwar so, dass die Gesamtkonfiguration gleich bleibt, wenn wir das gesamte Spielbrett beliebig oft um 90° drehen. Offensichtlich enthält in dieser Konfiguration jede Zeile bzw. Spalte genau einen Stein, die äußersten n Ringe enthalten jeweils 4 Steine und wegen der Rotationssymmetrie sieht man schnell, dass $A = B$ gilt.

Aufgabe 3.

Antwort: Der Mittelwert von $f(\pi)$ über alle Permutationen π von S beträgt $\frac{2p-1}{p}$.

Sei $f_k(\pi)$ die Anzahl der Vielfachen von p unter $\pi(1)+\pi(2)+\ldots+\pi(k)$. (Also $f_k(\pi) = 0$ oder $f_k(\pi) = 1$.) Dann ist der Mittelwert von $f(\pi)$ gleich der Summe über alle $k \in S$ der Mittelwerte von $f_k(\pi)$. Offensichtlich gilt $f_p(\pi) = 1$ für jedes π, da die Summe aller Zahlen in S durch p teilbar ist. Also ist auch der Mittelwert von $f_p(\pi)$ über alle π gleich 1. Wir werden zeigen, dass für alle $k < p$ der Mittelwert von $f_k(\pi)$ genau $\frac{1}{p}$ beträgt. Damit ergibt sich dann für den gesamten Mittelwert: $(p-1)\cdot\frac{1}{p}+1 = \frac{2p-1}{p}$.
Sei also $k < p$. Für eine Permutation $\pi = (\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(p))$ sei $\pi + a$ die Permutation $(\pi(1)+a,\ \pi(2)+a,\ \ldots,\ \pi(p)+a)$, wobei wir modulo p addieren. Wir können nun die Permutationen auf folgende Art und Weise in $(p-1)!$ Gruppen zu je p Permutationen einteilen: Jede Gruppe hat die Form $\pi,\ \pi+1,\ \pi+2,\ \ldots,\ \pi+p-1$ für eine Permutation π. Berechnen wir nun den Mittelwert von $f_k(\pi)$ für eine solche Gruppe: Sei $f_k(\pi) = s$, so gilt natürlich

$$f_k(\pi+1) \equiv s+k, f_k(\pi+2) \equiv s+2k, \ldots, f_k(\pi+p-1) \equiv s+(p-1)k \pmod p.$$

Da $k < p$ und p prim ist, können offensichtlich keine zwei dieser Summen in der gleichen Restklasse modulo p liegen. Also muss unter diesen Summen jede Restklasse genau einmal vertreten sein. Also ist insbesondere genau eine dieser Zahlen durch p teilbar. Der Mittelwert von $f_k(\pi)$ für die Permutationen in dieser Gruppe ist also $\frac{1}{p}$ und da das in jeder Gruppe gilt, ist der Mittelwert von $f_k(\pi)$ über alle Permutationen $\frac{1}{p}$.

Aufgabe 4.

Betrachten wir zuerst nur zusammenhängende Gruppen von 600 Kindern. Falls es darunter eine gibt, in der gleich viele Mädchen in der ersten und in der zweiten Hälfte sind, dann sind wir

fertig. Ansonsten sei für eine solche Gruppe der Wert d die Anzahl an Mädchen in der vorderen Hälfte minus der Anzahl an Mädchen in der hinteren Hälfte (wobei vorne und hinten in Richtung des Uhrzeigersinns definiert ist). Es gilt also $d \neq 0$ für alle diese Gruppen. Wenn wir nun alle diese Gruppen mit 600 Kindern betrachten, so sehen wir, dass jedes Mädchen in 300 vorderen Hälften von solchen Gruppen ist und in 300 hinteren Hälften von solchen Gruppen ist. Daher muss die Summe von d über alle diese Gruppen gleich 0 sein. Wenn wir nun zwei solcher Gruppen betrachten, die nur um ein Kind versetzt sind, so sehen wir, dass sich der Wert d bei diesen beiden Gruppen nur um höchstens 2 unterscheiden kann, da sich die Anzahl der Mädchen in der vorderen und in der hinteren Hälfte beim Versetzen um ein Kind jeweils höchstens um 1 verändern kann. Da nun die Summe über alle d gleich 0 ist, muss es Gruppen geben, in denen d positiv ist, und Gruppen, in denen d negativ ist. Daher muss es auch irgendwo zwei Gruppen geben, die nur um ein Kind versetzt sind und wo d in der einen Gruppe positiv und in der anderen Gruppe negativ ist. Da sich die beiden d um höchstens 2 unterscheiden, muss also für die eine Gruppe $d = 1$ und für die andere Gruppe $d = -1$ gelten.
Setzen wir nun o.B.d.A. fest, dass die eine der beiden Gruppen, die wir gerade gefunden haben, von Kind 1 bis Kind 600 geht, davon die hintere Hälfte von Kind 1 bis Kind 300 und die vordere Hälfte von Kind 301 bis Kind 600, und die zweite Gruppe von Kind 2 bis Kind 601 geht, dementsprechend natürlich davon die hintere Hälfte von Kind 2 bis Kind 301 und die vordere Hälfte von Kind 302 bis Kind 601. Man sieht nun leicht: Damit die oben gefundene Situation vorliegt, müssen unter den Kinder 2–300 gleich viele Mädchen sein wir unter den Kindern $302 - -600$. Außerdem muss entweder Kind 301 ein Mädchen sein und Kinder 1 und 601 nicht (dann ist $d = 1$ für die Gruppe 1–600 und $d = -1$ für die Gruppe 2–601) oder genau umgekehrt, Kind 301 kein Mädchen sein, und Kinder 1 und 601 schon (dann ist $d = -1$ für die Gruppe 1–600 und $d = 1$ für die Gruppe 2–601). Um beide diese Fälle zu betrachten, sagen wir, Kind 301 ist A und Kinder 1 und 601 sind B, wobei entweder A oder B für Mädchen und das andere für nicht-Mädchen steht.
Nun betrachten wir wieder zusammenhängende Gruppen mit anderen Längen: Nehmen wir an, Kind 2 sei A. Dann hätten wir offensichtlich gleich viele Mädchen unter den Kindern 2–300 wie unter den Kinder 3–301. Da wir aber wissen, das unter den Kinder 302–600 gleich viele Mädchen wir unter den Kinder 2–300 sind, erfüllt dadurch die Gruppe 3–600 die gesuchte Bedingung. Kind 2 sei nun also B. Wir können das gleiche Argument gespiegelt verwenden und finden so entweder die gesuchte zusammenhängende Gruppe, oder folgern, Kind 600 ist B. Jetzt benutzen wir wieder das gleiche Argument: Entweder, die Gruppe 4–599 erfüllt die gesuchte Bedingung oder Kind 3 ist B. Gleiches gilt wieder gespiegelt und so ist Kind 599 auch B, falls wir keine Gruppe finden, die die Bedingung erfüllt. So können wir immer weiter vorgehen und finden entweder eine Gruppe, die die Bedingung erfüllt, oder, dass die Kinder 1–200 und 402–601 alle B sind. Weiter können wir nicht vorgehen, weil die verwendeten Gruppen dann eine Länge kleiner 200 hätten, was nicht erlaubt ist. Aber mit der jetzt gefundenen Information sind wir eh schon fertig: Wir haben eine Gruppe von 200 aufeinanderfolgenden Kindern gefunden, die alle B sind und damit die Bedingung erfüllen.

Aufgabe 5.

Wir teilen die Fußballspieler in N Gruppen auf: Gruppe A besteht aus den $N + 1$ größten Spielern, Gruppe B aus den $N + 1$ nächstgrößeren Spielern etc. Wir wollen zeigen, dass wir $N(N - 1)$ Spieler so entfernen können, dass genau 2 Spieler aus jeder Gruppe übrig bleiben und diese beiden jeweils nebeneinander stehen.
Wir gehen folgendermaßen vor: Betrachte den zweitlinkesten Spieler jeder Gruppe und wähle die Gruppe aus, deren zweitlinkester Spieler am weitesten links steht. Sei das o.B.d.A. die Gruppe A. Dann entfernen wir alle Spieler von Gruppe A außer den beiden linkesten und alle Spieler von anderen Gruppen, die links von den verbleibenden 2 Spielern der Gruppe A stehen. Durch die Auswahl der Gruppe A haben wir dadurch von jeder anderen Gruppe höchstens einen Spieler entfernt. Die

beiden verbleibenden Spieler aus Gruppe A stehen nun ganz links. Wir ignorieren diese beiden ab jetzt und machen mit den restlichen Spielern wieder genau das gleiche: Wir suchen die Gruppe, deren zweitlinkester Spieler am weitesten links steht, behalten von dieser Gruppe die beiden linkesten Spieler und entfernen alle anderen Spieler links davon. Bei diesem Prozess wird jetzt jede Gruppe genau einmal ausgewählt und daher bleiben von jeder Gruppe genau zwei nebeneinanderstehende Spieler übrig: Wäre das nicht der Fall, wären also z.B. aus Gruppe B mehr als $N-1$ Spieler entfernt worden, hätte das dadurch geschehen müssen, dass mehr als $N-1$-mal eine andere Gruppe ausgewählt worden ist und dann jeweils ein Spieler aus B entfernt worden ist. Das ist aber nicht möglich, da jede Gruppe nur einmal ausgewählt werden kann und es nur N Gruppen gibt.

Aufgabe 6.

Wir stellen zuerst fest: Die möglichen Ergebnisse des Schießens sind genau diejenigen Teilmengen der n Ecken, bei denen von je zwei Ecken, zwischen denen genau eine weitere Ecke liegt, mindestens eine Ecke ausgewählt wird:
Offensichtlich folgt aus der Tatsache, dass jeder Burg auf eine Nachbarburg schießt, dass von zwei Ecken, zwischen denen genau eine weitere Ecke ist, mindestens eine ausgewählt werden muss. Wenn wir umgekehrt so eine Konfiguration haben, kann sie das Ergebnis eines Schießens sein: Wir lassen zuerst alle Burgen ihre Geschütze im Uhrzeigersinn ausrichten und drehen dann die Geschütze derjenigen Burgen, die auf eine nicht ausgewählte Burg gerichtet sind, um. Dadurch wird dann beim Schießen jede der ausgewählten Burgen sicher getroffen.
Sie $K(n)$ die Anzahl an Mengen, die von einem regelmäßigen n-Eck von je zwei benachbarten Ecken mindestens eine enthalten. Wir zeigen nun: $P(2l) = K(l)^2$ und $P(2l+1) = K(2l+1)$ für natürliche Zahlen l:
Wir bilden aus unserer ursprünglichen Anordnung von Burgen einen neuen Kreis von Burgen, indem wir mit einer Burg starten und im Uhrzeigersinn jede zweite Burg nehmen. Für $n = 2l+1$ ergibt das den folgenden Kreis (wenn wir die Burgen in der ursprünglichen Konfiguration von 1 bis $2l+1$ durchnummerieren):

$$1,\, 3,\, 5,\, \ldots,\, 2l-1,\, 2l+1,\, 2,\, 4,\, 6,\, \ldots,\, 2l-2,\, 2l.$$

Nach $2l$ würde dann wieder 1 kommen. Offensichtlich kommt jede Burg genau einmal in diesem Kreis vor und jede Burg hat als ihre beiden Nachbarn die beiden Burgen, von denen sie vorher noch um eine weitere Burg entfernt war. Um ein gültiges Ergebnis des Schießens zu erhalten, müssen wir also von diesem neuen Kreis die Burgen so auswählen, dass von je zwei benachbarten Burgen mindestens eine ausgewählt ist. Also gilt $P(2l+1) = K(2l+1)$. Wenn nun $n = 2l$ ist, werden wir zwei Kreise erhalten: Den Kreis $1, 3, 5, \ldots, 2l-3, 2l-1$, danach kommt dann wieder 1, und den Kreis $2, 4, 6, \ldots, 2k-2, 2l$, danach kommt dann wieder 2. Wir müssen nun Burgen so auswählen, dass in jedem dieser beiden neuen Kreise gilt, dass von je zwei benachbarten Burgen mindestens eine ausgewählt ist. Also gilt $P(2l) = K(l)^2$.
Um zu zeigen, dass $P(k)$ und $P(k+1)$ teilerfremd sind, müssen wir also zeigen, dass $K(2l+1)$ zu $K(l)^2$ und zu $K(l+1)^2$ teilerfremd ist. Dafür genügt es natürlich zu zeigen, dass $K(2l+1)$ zu $K(l)$ und zu $K(l+1)$ teilerfremd ist. Zuerst zeigen wir, dass die Folge K die Fibonacci-Rekursion $K(l) = K(l-1) + K(l-2)$ erfüllt (allerdings mit anderen Startwerten als die Fibonacci-Folge).
Sei $K(l) = A(l) + B(l)$, wobei $A(l)$ die Menge an gültigen Teilmengen ist, die den Eckpunkt l enthalten und $B(l)$ die Menge an gültigen Teilmengen, die den Eckpunkt l nicht enthalten. Betrachte nun eine Teilmenge, die zu $A(l)$ zählt. Falls von $l-1$ und 1 mindestens eine Ecke ausgewählt ist, so können wir l entfernen und erhalten eine beliebige gültige Menge aus $K(l-1)$. Wenn $l-1$ und 1 beide nicht ausgewählt sind, können wir $l-1$ und l entfernen und erhalten eine beliebige gültige Teilmenge von $\{1, \ldots, l-2\}$, die 1 nicht enthält. Offensichtlich ist die Anzahl dieser Teilmengen gleich $B(l-2)$. Also haben wir insgesamt die Gleichung $A(l) = K(l-1) + B(l-2)$. Betrachten

wir nun eine Teilmenge, die zu $B(l)$ zählt. Da also l nicht ausgewählt ist, sind sicher $l-1$ und 1 ausgewählt. Wenn wir also $l-1$ und l entfernen, erhalten wir eine beliebige gültige Teilmenge von $\{1,,\ldots,l-2\}$, die 1 enthält. Also gilt $B(l) = A(l-2)$. Wenn wir die beiden gefundenen Gleichungen addieren, erhalten wir $A(l)+B(l) = K(l-1)+B(l-2)+A(l-2)$ und damit wie gewünscht $K(l) = K(l-1)+K(l-2)$.
Wir zeigen nun folgendes: Für eine Primzahl p und natürliche Zahlen a und b folgt aus $p|K(a)$ und $p|K(a+b)$, dass $p|K(a+ib)$ für jede ganze Zahl i:
Falls irgendwo zwei aufeinanderfolgende Folgenglieder durch p teilbar sind, sind wegen der Rekursion alle Folgenglieder durch p teilbar und die Behauptung stimmt. Seien also nie zwei aufeinanderfolgende Folgenglieder beide durch p teilbar. Wir betrachten die Folgenglieder modulo p. Wenn wir jedes Folgenglied mit der gleichen zu p teilerfremden Zahl multiplizieren, ist die Rekursion nach wie vor erfüllt und die Position der durch p teilbaren Folgenglieder ändert sich nicht. Wir zeigen die Behauptung per Induktion für alle $i>0$. Für alle $i<0$ wird es dann per Induktion analog gezeigt. Seien also $K(a)$, $K(a+b)$ und $K(a+ib)$ alle durch p teilbar. Sei $K(a+1)\equiv x$ und $K(a+ib+1)\equiv y$ (modulo p natürlich). Da x und y zu p teilerfremd sind, können wir die gesamte Folge so mit einer zu p teilerfremden Zahl multiplizieren, dass $K(a+ib+1)\equiv x$ gilt. Offensichtlich sind alle Folgenglieder eindeutig durch $K(a+ib)\equiv 0$ und $K(a+ib+1)\equiv x$ bestimmt. Bevor wie die Folge mit einem Wert multipliziert hatten, galt $K(a)\equiv 0, K(a+1)\equiv x$ und $K(a+b)\equiv 0$. Also muss jetzt in unserer neuen Folge $K(a+ib+b)\equiv 0$ gelten. Da sich aber die Positionen der durch p teilbaren Folgenglieder durch die Multiplikation nicht geändert haben, musste schon davor $K(a+(i+1)b)\equiv 0$ gelten.
Nun können wir mit einem Widerspruch den Beweis fertigstellen:
Offensichtlich gilt $K(2)=3$ und $K(3)=4$. Daher können wir in Einklang mit unserer Rekursion $K(1)=1, K(0)=2, K(-1)=-1$ definieren. Nehmen wir an, dass $K(2l+1)$ und $K(l)$ einen gemeinsamen Primfaktor p haben. Dann folgt aus unserer vorher bewiesenen Behauptung, dass $K(l-(l+1)) = K(-1) = -1$ ebenfalls durch diesen Primteiler p teilbar ist, was unmöglich ist. Ebenso würde daraus, dass $K(2l+1)$ und $K(l+1)$ einen gemeinsamen Primfaktor p haben, folgen, dass $K(l+1-l) = K(1) = 1$ durch p teilbar ist, was ebenfalls ein Widerspruch ist. Also ist $K(2l+1)$ zu $K(l)$ und $K(l+1)$ teilerfremd.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

siehe [3, MEMO 2010, Individual 2], übersetzt und bearbeitet von Veronika Schreitter und vom MmF-Team

Aufgabe 2.

siehe [4, MEMO 2013, Individual 2], übersetzt und bearbeitet von Veronika Schreitter und vom MmF-Team

Aufgabe 3.

siehe [1, MEMO 2012, Team 4], übersetzt und bearbeitet von Veronika Schreitter und vom MmF-Team

Aufgabe 4.

siehe [2, IMO-Shortlist 2011, C2] übersetzt und bearbeitet von Veronika Schreitter und vom MmF-Team

Aufgabe 5.

siehe [2, IMO 2017, Aufgabe 5] übersetzt und bearbeitet von Veronika Schreitter und vom MmF-Team

Aufgabe 6.

siehe [3, MEMO 2010, Team 3], übersetzt und bearbeitet von Veronika Schreitter und vom MmF-Team

Literatur

[1] Art of Problem Solving. `https://artofproblemsolving.com/community`. (aufgerufen am 21.12.2020).

[2] Internationale Mathematik-Olympiade. `https://www.imo-official.org/problems.aspx`. Alle IMO - Angaben und die meisten IMO-Shortlists vergangener Jahre (aufgerufen am 21.12.2020).

[3] Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade (MEMO) 2010. `http://memo2010.skmo.sk/problems.php`. (aufgerufen am 21.12.2020).

[4] Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade (MEMO) 2013. `https://memo2013.mik.uni-pannon.hu/`. (aufgerufen am 21.12.2020).