52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Kurs für Internationale „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 16. Jänner 2021

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Daniel Holmes zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 12. Dezember 2020 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Daniel Holmes bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 16. Jänner 2021 von 10:00–11:45 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Permutationen

Einführung

Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Eine n-stellige *Permutation* ist eine bijektive Funktion $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$. Die Menge aller solcher Permutationen ist

$$S_n = \{\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\} \mid \sigma \text{ ist bijektiv}\}$$

Um eine Permutation $\sigma \in S_n$ darzustellen, schreiben wir $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$. Zum Beispiel ist $\sigma = (3, 1, 2)$ die Permutation $\sigma \in S_3$ mit $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 1$ und $\sigma(3) = 2$.

Umkehrung

Da jede Bijektion eine eindeutige Umkehrfunktion hat, gibt es zu jedem $\sigma \in S_n$ genau eine Funktion $\sigma^{-1} : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$, sodass $\sigma(\sigma^{-1}(x)) = \sigma^{-1}(\sigma(x)) = x$ für alle $x \in \{1, 2, \dots, n\}$ gilt. Da die Umkehrfunktion einer Bijektion wieder eine Bijektion ist, gilt $\sigma^{-1} \in S_n$.

Beispiel: Sei $\sigma = (2, 3, 1)$. Dann ist $\sigma^{-1} = (3, 1, 2)$.

Verkettung

Für $\sigma, \pi \in S_n$ definieren wir die Funktion $\sigma\pi : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ durch $\sigma\pi(x) = \sigma(\pi(x))$. Die Permutation $\sigma\pi$ erhält man also, indem man zuerst π und dann σ anwendet. Da die Verknüpfung zweier Bijektionen wieder eine Bijektion ist, gilt $\sigma\pi \in S_n$. Wir definieren außerdem $\sigma^k = \sigma\sigma \dots \sigma$ (k Mal) und $\sigma^{-k} = (\sigma^{-1})^k$. Per Konvention bezeichnet σ^0 die Permutation, die jeden Wert auf sich selbst abbildet. Mit dieser Schreibweise gilt dann $\sigma^a\sigma^b = \sigma^{a+b}$ für alle $a, b \in \mathbb{Z}$.

Beispiel: Sei $\sigma = (2, 1, 3, 4)$, $\pi = (3, 1, 4, 2)$. Dann ist $\sigma\pi(1) = \sigma(\pi(1)) = \sigma(3) = 3$. Ähnlich errechnet man $\sigma\pi = (3, 2, 4, 1)$ und $\pi\sigma = (1, 3, 4, 2)$. Die Reihenfolge der Verkettung ist also nicht egal!

Zyklen und Transpositionen

Seien $a_1, a_2, \dots, a_k$ verschiedene Elemente von $\{1, 2, \dots, n\}$. Der *k-Zyklus* $\sigma = (a_1 a_2 \dots a_k)$ ist die Permutation $\sigma \in S_n$, die durch $\sigma(a_i) = a_{i+1}$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, $\sigma(a_k) = a_1$ und $\sigma(x) = x$ für alle $x \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$ definiert ist. $\sigma = (a_1 a_2 \dots a_k)$ 'rotiert' also $a_1, a_2, \dots, a_k$:

$$a_1 \overset{\sigma}{\longmapsto} a_2 \overset{\sigma}{\longmapsto} a_3 \overset{\sigma}{\longmapsto} \cdots \overset{\sigma}{\longmapsto} a_{k-1} \overset{\sigma}{\longmapsto} a_k \overset{\sigma}{\longmapsto} a_1$$

Einen 2-Zyklus nennt man auch *Transposition*. Eine Transposition tauscht also zwei Elemente und fixiert alle anderen.

Beispiele:

- Die Transposition $\sigma = (12)$ als Element von S_3 ist die Permutation $(2, 1, 3)$:

$$1 \overset{\sigma}{\longmapsto} 2 \overset{\sigma}{\longmapsto} 1 \quad \text{und} \quad 3 \overset{\sigma}{\longmapsto} 3$$

- Der 3-Zyklus $\sigma = (234)$ als Element von S_5 ist die Permutation $(1, 3, 4, 2, 5)$:

$$1 \overset{\sigma}{\longmapsto} 1, \quad 2 \overset{\sigma}{\longmapsto} 3 \overset{\sigma}{\longmapsto} 4 \overset{\sigma}{\longmapsto} 2 \quad \text{und} \quad 5 \overset{\sigma}{\longmapsto} 5$$

- Wir können Zyklen auch verketten: Die Verkettung $\sigma = (12)(345)$ als Element von S_5 ist die Permutation $(2, 1, 4, 5, 3)$:

$$1 \overset{\sigma}{\longmapsto} 2 \overset{\sigma}{\longmapsto} 1 \quad \text{und} \quad 3 \overset{\sigma}{\longmapsto} 4 \overset{\sigma}{\longmapsto} 5 \overset{\sigma}{\longmapsto} 3$$

- Beachte, dass die Reihenfolge der Verkettung nicht egal ist, wenn die verketteten Zyklen ein gemeinsames Element haben. Zum Beispiel ist $(123)(12) = (3, 2, 1)$, da zuerst (12) und dann (123) angewandt wird. Im Gegensatz dazu ist $(12)(123) = (1, 3, 2)$, da wir hier zuerst (123) und dann (12) anwenden. (Hier haben wir sowohl (12) als auch (123) als Elemente von S_3 aufgefasst.)

- Rotiert man die Elemente $a_1, a_2, \dots, a_k$, erhält man den gleichen k-Zyklus:

$$(a_1 a_2 \dots a_k) = (a_2 a_3 \dots a_k a_1) = \cdots = (a_k a_1 a_2 \dots a_{k-1})$$

Zyklenschreibweise

Die Darstellung von Permutationen als $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)))$ hat den Nachteil, dass sie keine direkten Schlüsse auf die Struktur von σ zulässt. Eine manchmal vorteilhaftere Darstellung ist die *Zyklenschreibweise*. Dabei stellt man eine Permutation als Verkettung von Zyklen dar, wobei keine zwei Zyklen ein Element gemeinsam haben. Damit jede Zahl in der Darstellung genau einmal vorkommt, fügen wir die Fixpunkte als *1-Zyklen* hinzu.

Beispiele:

- $(2, 1, 3, 4, 5) = (12)(3)(4)(5)$
- $(2, 1, 5, 3, 4) = (12)(354)$
- $(3, 2, 1, 5, 4, 7, 8, 6) = (13)(2)(45)(678)$

Jede Permutation hat eine Darstellung in Zyklenschreibweise. Diese ist eindeutig bestimmt bis auf die Reihenfolge der Zyklen und bis auf Rotation der Elemente innerhalb eines Zyklus. Zum Beispiel ist $(12)(34) = (34)(12)$ und $(123) = (231) = (312)$.

Aufgaben

Aufgabe 1. Sei $\sigma = (3,4,5,2,1,6)$ und $\pi = (2,1,4,5,6,3)$. Stelle σ und π in Zyklenschreibweise dar und berechne $\sigma\pi$ und $\pi\sigma$ in Zyklenschreibweise.

Aufgabe 2. Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und $\sigma \in S_n$.

(a) Zeige, dass es eine natürliche Zahl $k \geq 1$ gibt, sodass $\sigma^k(x) = x$ für alle $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt. *(Die kleinste solche Zahl k wird als Ordnung von σ bezeichnet.)*

(b) Bestimme die Ordnung von σ und π aus Aufgabe 1.

Aufgabe 3. Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl und $\sigma \in S_n$.

(a) Zeige, dass es Transpositionen $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k \in S_n$ gibt, sodass $\sigma = \tau_1\tau_2\ldots\tau_k$.

(b) Die Menge $F(\sigma)$ der *Fehlstände* von σ ist definiert als:

$$F(\sigma) = \{(i,j) \in \{1,2,\ldots,n\}^2 \ \mid \ i < j \text{ und } \sigma(i) > \sigma(j)\}$$

Zeige, dass $k \equiv |F(\sigma)| \mod 2$ gilt, wenn σ als Verkettung von k Transpositionen geschrieben werden kann.

(Die Zahl $\operatorname{sgn}(\sigma) := (-1)^{|F(\sigma)|}$ wird als Vorzeichen von σ bezeichnet. Diese Aufgabe zeigt, dass die Vorzeichenfunktion multiplikativ ist, sprich $\operatorname{sgn}(\sigma\pi) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\pi)$ für alle $\sigma, \pi \in S_n$.)

Aufgabe 4. Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Eine Permutation $\sigma \in S_n$ hat ein *lokales Maximum* bei $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$, wenn $\sigma(x) > \sigma(y)$ für alle $y \in \{x-1, x+1\} \cap \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt. Wie viele Permutationen $\sigma \in S_n$ gibt es, die nur genau ein lokales Maximum haben?

Aufgabe 5. Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl, $\sigma \in S_n$ und $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Wir nennen x einen *Fixpunkt* von σ, wenn $\sigma(x) = x$ gilt. Sei $p_n(k)$ die Anzahl der Permutationen in S_n mit genau k Fixpunkten.

(a) Zeige, dass $\sum_{k=0}^{n} k p_n(k) = n!$.

(b*) Zeige, dass $\sum_{k=0}^{n} (k-1)^2 p_n(k) = n!$.

Aufgabe 6. Sei $n > 1$ eine ungerade natürliche Zahl und seien $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ganze Zahlen. Für jede der $n!$ Permutationen $\pi \in S_n$ sei

$$S(\pi) = \sum_{i=1}^{n} k_i \pi(i).$$

Zeige, dass es zwei verschiedene Permutationen α und β in S_n gibt, sodass $S(\alpha) - S(\beta)$ durch $n!$ teilbar ist.

Aufgabe 7. Sei $n > 1$ eine ungerade natürliche Zahl. Für eine Permutation $\pi \in S_n$ sei

$$D(\pi) = |\pi(1) - 1| + |\pi(2) - 2| + \cdots + |\pi(n) - n| \, .$$

(a) Man zeige $D(\pi) \leq \frac{n^2-1}{2}$ für alle $\pi \in S_n$.

(b) Für wie viele $\pi \in S_n$ gilt in der obigen Ungleichung Gleichheit?

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Orientiere dich an den Beispielen in der Einleitung.

Aufgabe 2.

(a) Betrachte die unendliche Folge $\sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, \dots$ von Permutationen in S_n. Wie viele Elemente hat S_n?

(b) Verwende die Zyklenschreibweise von σ und π.

Aufgabe 3.

(a) Induktion nach n.

(b) Verwende entweder Induktion nach k, oder definiere $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{|F(\sigma)|}$ und beweise:

1. $\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$
2. $\operatorname{sgn}(\alpha\beta) = \operatorname{sgn}(\alpha) \cdot \operatorname{sgn}(\beta)$
3. $\operatorname{sgn}(\tau) = -1$ für jede Transposition $\tau \in S_n$.

Beachte außerdem, dass $a \equiv b \mod 2$ genau dann gilt, wenn $(-1)^a = (-1)^b$.

Aufgabe 4. Für $\sigma \in S_n$ mit nur genau einem lokalem Maximum, betrachte die Menge

$$\{\sigma(i) \mid 1 \leq i < \sigma^{-1}(n)\} \subseteq \{1, 2, \dots, n-1\}$$

Aufgabe 5.

(a) Zähle die Anzahl der Elemente in $\{(\sigma, x) \in S_n \times \{1, 2, \dots, n\} \mid \sigma(x) = x\}$ auf zwei verschiedene Arten.

(b*) Ähnlich wie (a). Definiere für alle $(\sigma, x) \in S_n \times \{1, 2, \dots, n\}$ die Funktion

$$g(\sigma, x) = \begin{cases} k & \text{wenn } \sigma(x) = x \text{ und } \sigma \text{ genau } k \text{ Fixpunkte hat} \\ 0 & \text{wenn } \sigma(x) \neq x \end{cases}$$

Berechne die Summe $\sum_{(\sigma,x) \in S_n \times \{1,2,\dots,n\}} g(\sigma, x)$ auf zwei verschiedene Arten.

Bemerkung: Mit einem ähnlichen Trick kann man induktiv $\sum_{k=0}^{n} k^r p_n(k)$ für alle $r \in \mathbb{N}$ berechnen.

Aufgabe 6. Beweis durch Widerspruch. Berechne $\sum_{\alpha \in S_n} S(\alpha)$ auf zwei verschiedene Arten.

Aufgabe 7. Verwende $|x| = \pm x$ und $D(\pi) = \pm 1 \pm 1 \pm 2 \pm 2 \pm \cdots \pm n \pm n$. Wie oft kommt das Vorzeichen $+$ und wie oft das Vorzeichen $-$ in dieser Summe vor?

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge ausgearbeitet von Daniel Holmes, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 1.

Für $\sigma = (3, 4, 5, 2, 1, 6)$ gilt:

$$1 \xmapsto{\sigma} 3 \xmapsto{\sigma} 5 \xmapsto{\sigma} 1, \qquad 2 \xmapsto{\sigma} 4 \xmapsto{\sigma} 2 \qquad \text{und} \qquad 6 \xmapsto{\sigma} 6$$

Daher ist $\sigma = (135)(24)(6)$. Für $\pi = (2, 1, 4, 5, 6, 3)$ gilt:

$$1 \xmapsto{\pi} 2 \xmapsto{\pi} 1 \qquad \text{und} \qquad 3 \xmapsto{\pi} 4 \xmapsto{\pi} 5 \xmapsto{\pi} 6 \xmapsto{\pi} 3$$

Daher ist $\pi = (12)(3456)$.
Um $\sigma\pi$ zu bestimmen führen wir zuerst π und dann σ aus, denn per Definition gilt $\sigma\pi(x) = \sigma(\pi(x))$.

$$\begin{aligned}
1 &\xmapsto{\pi} 2 \xmapsto{\sigma} 4\\
2 &\xmapsto{\pi} 1 \xmapsto{\sigma} 3\\
3 &\xmapsto{\pi} 4 \xmapsto{\sigma} 2\\
4 &\xmapsto{\pi} 5 \xmapsto{\sigma} 1\\
5 &\xmapsto{\pi} 6 \xmapsto{\sigma} 6\\
6 &\xmapsto{\pi} 3 \xmapsto{\sigma} 5
\end{aligned}$$

Daher ist $\sigma\pi = (4, 3, 2, 1, 6, 5)$. Die Zyklen, die sich daraus ergeben, sind:

$$1 \xmapsto{\sigma\pi} 4 \xmapsto{\sigma\pi} 1, \qquad 2 \xmapsto{\sigma\pi} 3 \xmapsto{\sigma\pi} 2 \qquad \text{und} \qquad 5 \xmapsto{\sigma\pi} 6 \xmapsto{\sigma\pi} 5$$

Die Zyklenschreibweise ist also $\sigma\pi = (14)(23)(56)$.
Auf die gleiche Art können wir $\pi\sigma$ bestimmen. Diesmal müssen wir zuerst σ und dann π anwenden:

$$\begin{aligned}
1 &\xmapsto{\sigma} 3 \xmapsto{\pi} 4\\
2 &\xmapsto{\sigma} 4 \xmapsto{\pi} 5\\
3 &\xmapsto{\sigma} 5 \xmapsto{\pi} 6\\
4 &\xmapsto{\sigma} 2 \xmapsto{\pi} 1\\
5 &\xmapsto{\sigma} 1 \xmapsto{\pi} 2\\
6 &\xmapsto{\sigma} 6 \xmapsto{\pi} 3
\end{aligned}$$

Daher ist $\pi\sigma = (4, 5, 6, 1, 2, 3)$. Die Zyklen, die sich daraus ergeben, sind:

$$1 \xmapsto{\pi\sigma} 4 \xmapsto{\sigma\pi} 1, \qquad 2 \xmapsto{\sigma\pi} 5 \xmapsto{\sigma\pi} 2 \qquad \text{und} \qquad 3 \xmapsto{\sigma\pi} 6 \xmapsto{\sigma\pi} 3$$

Die Zyklenschreibweise ist also $\pi\sigma = (14)(25)(36)$.

Aufgabe 2.

(a) Wir betrachten die folgende unendliche Folge von Permutationen in S_n:

$$\sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, \sigma^5, \ldots$$

Da S_n endlich ist, gibt es $a < b$ in $\mathbb{N}$, sodass $\sigma^a = \sigma^b$, sprich $\sigma^a(x) = \sigma^b(x)$ für alle $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Nun wenden wir die Umkehrfunktion σ^{-a} von σ^a auf beide Seiten dieser Gleichung an und erhalten für alle $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned} \sigma^{-a}\sigma^a(x) &= \sigma^{-a}\sigma^b(x) \\ x &= \sigma^{b-a}(x) \end{aligned}$$

Wegen $a < b$ ist $b - a \geq 1$, und daher erfüllt $k = a - b$ die geforderte Bedingung.

(b) Aus Aufgabe 1 wissen wir, dass $\sigma = (3, 4, 5, 2, 1, 6) = (135)(24)(6)$, sprich

$$1 \xmapsto{\sigma} 3 \xmapsto{\sigma} 5 \xmapsto{\sigma} 1, \quad 2 \xmapsto{\sigma} 4 \xmapsto{\sigma} 2 \quad \text{und} \quad 6 \xmapsto{\sigma} 6$$

Nehmen wir nun an, dass $\sigma^k(x) = x$ für alle $x \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ gilt. Da σ in Zyklenschreibweise einen 3-Zyklus enthält, muss $3|k$ gelten, da sonst 1 nicht auf 1 (bzw. 3 nicht auf 3, bzw. 5 nicht auf 5) abgebildet wird.

Da σ in Zyklenschreibweise eine Transposition enthält, muss außerdem $2|k$ gelten, da sonst 2 nicht auf 2 bzw. 4 nicht auf 4 abgebildet wird.

Daher gilt $6|k$ und der kleinste Kandidat für die Ordnung von σ ist $k = 6$, da die Ordnung einer Permutation per Definition immer positiv ist. Man prüft leicht nach, dass tatsächlich $\sigma^6(x) = x$ für alle $x \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ gilt. Daher ist 6 die Ordnung von σ.

Allgemein gilt: Für eine Permutation $\mu \in S_n$ sei

$$M = \{k \in \mathbb{N} \mid \mu \text{ hat in Zyklenschreibweise mindestens einen } k\text{-Zyklus}\}$$

Dann ist die Ordnung von μ gleich dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Elemente in M.

Zum Beispiel besteht $\sigma = (135)(24)(6)$ in Zyklenschreibweise aus 1-Zyklen, 2-Zyklen und 3-Zyklen, und daher ist die Ordnung von σ wie oben berechnet $\text{kgV}(1, 2, 3) = 6$.

Das wenden wir nun für π an. Aus Aufgabe 1 wissen wir: $\pi = (2, 1, 4, 5, 6, 3) = (12)(3456)$. In Zyklenschreibweise besteht π also aus einem 2-Zyklus und einem 4-Zyklus, und daher ist die Ordnung von π gleich $\text{kgV}(2, 4) = 4$.

Aufgabe 3.

(a) Gegeben ist $\sigma \in S_n$ und wir wollen Transpositionen $\tau_1, \ldots, \tau_k \in S_n$ finden, sodass $\sigma = \tau_1 \ldots \tau_k$ gilt. Dazu verwenden wir <u>Induktion nach n</u>:

- <u>Induktionsbasis:</u> $n = 2$. Sei $\sigma \in S_2$.
  * *Fall 1*: $\sigma = (2, 1)$. Das ist bereits eine Transposition, nämlich $\sigma = (12)$.
  * *Fall 2*: $\sigma = (1, 2)$. Das heißt σ fixiert alle Elemente. Die einzige Transposition in S_2 ist (12). Diese vertauscht 1 und 2. Die Verkettung $(12)(12)$ vertauscht 1 und 2 also zweimal: einmal hin und einmal zurück. Daher fixiert $(12)(12)$ sowohl 1 als auch 2 und es gilt $\sigma = (12)(12)$, eine Verkettung von Transpositionen.
- <u>Induktionsschritt:</u> Sei $n \geq 3$, $\sigma \in S_n$, und nehmen wir an, dass die Aussage für alle $\sigma \in S_{n-1}$ gilt.

* *Fall 1*: $\sigma(n) = n$. Dann können wir σ als Element von S_{n-1} auffassen, und nach Induktionsannahme gilt $\sigma = \tau_1 \ldots \tau_k$ für Transpositionen $\tau_1, \ldots, \tau_k$ in S_{n-1}. Diese Gleichung bleibt gültig, wenn wir $\tau_1, \ldots, \tau_k$ als Transpositionen in S_n betrachten. Daher gilt $\sigma = \tau_1 \ldots \tau_k$ in S_n.
* *Fall 2*: $\sigma(n) = m \neq n$. Dann definiere $\mu = (nm)\sigma \in S_n$, sodass $\mu(n) = n$ gilt. Laut Fall 1 gibt es Transpositionen $\tau_1, \ldots, \tau_k \in S_n$, sodass $\mu = \tau_1 \ldots \tau_k$. Daher gilt $\sigma = (nm)\mu = (nm)\tau_1 \ldots, \tau_k$, und σ ist eine Verkettung von Transpositionen, wie benötigt.

(b) Gegeben ist $\sigma = \tau_1 \ldots \tau_k$ mit $\sigma \in S_n$ und Transpositionen $\tau_1, \ldots, \tau_k \in S_n$. Wir sollen zeigen, dass $|F(\sigma)| \equiv k \mod 2$. Dazu gibt es (mindestens) zwei Möglichkeiten, von denen wir die erste nur skizzieren wollen, da ihre Ausführung eher technisch ist, während die zweite Lösung einen eleganten Trick beinhaltet.

– **Lösung 1 (Skizze):** Wir verwenden Induktion nach k und zeigen im Induktionsschritt, dass für jede Permutation $\mu \in S_n$ und jede Transposition $\tau \in S_n$ die Zahl $|F(\tau\mu)| - |F(\mu)|$ ungerade ist, denn dann gilt für $k \geq 2$, dass

$$|F(\tau_1 \ldots \tau_k)| \equiv |F(\tau_2 \ldots \tau_k)| + 1 \overset{\text{(Induktionsannahme)}}{\equiv} (k-1) + 1 \equiv k \mod 2.$$

Als Induktionsbasis zeigen wir entweder, dass eine einzelne Transposition eine ungerade Anzahl von Fehlständen hat, oder wir betrachten die Permutation, die jede Zahl auf sich selbst abbildet, als Verkettung von null Transpositionen.

– **Lösung 2 (mit elegantem Trick):** Wir verwenden folgende Beobachtung:

$$|F(\sigma)| \equiv k \mod 2 \quad \iff \quad (-1)^{|F(\sigma)|} = (-1)^k$$

Wir definieren nun die Vorzeichenfunktion sgn durch:

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} : S_n &\longrightarrow \{+1, -1\} \\ \sigma &\longmapsto (-1)^{|F(\sigma)|} \end{aligned}$$

Da $\sigma \in S_n$ eine Bijektion ist, gilt:

$$\{\{i, j\} \mid i < j \text{ und } i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}\} = \{\{\sigma(i), \sigma(j)\} \mid i < j \text{ und } i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$$

Das bedeutet:

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{|\sigma(j) - \sigma(i)|}{j - i} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} |j - i|}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)} = 1$$

Lassen wir die Betragsstriche weg, erhalten wir:

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \pm 1$$

Jeder Faktor $\frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$ ist aber genau dann negativ, wenn $(i, j) \in F(\sigma)$ ein Fehlstand ist, und positiv, wenn $(i, j) \notin F(\sigma)$ kein Fehlstand ist. Das Vorzeichen $\pm$ im obigen Ausdruck ist also genau dann $-$, wenn $|F(\sigma)|$ ungerade ist. Wir erhalten also:

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = (-1)^{|F(\sigma)|} = \operatorname{sgn}(\sigma)$$

Diese Formel ist deshalb so praktisch, weil sie uns mehr oder weniger direkt die 'Multiplikativität' der Vorzeichenfunktion gibt! Für $\alpha, \beta \in S_n$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
(-1)^{|F(\alpha\beta)|} &= \operatorname{sgn}(\alpha\beta) \\
&= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\alpha\beta(j) - \alpha\beta(i)}{j - i} \\
&= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\alpha\beta(j) - \alpha\beta(i)}{\beta(j) - \beta(i)} \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\beta(j) - \beta(i)}{j - i} \\
&= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\alpha(j) - \alpha(i)}{j - i} \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\beta(j) - \beta(i)}{j - i} \\
&= \operatorname{sgn}(\alpha) \cdot \operatorname{sgn}(\beta) \\
&= (-1)^{|F(\alpha)| + |F(\beta)|}
\end{aligned}$$

Für $\sigma = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_k$ erhalten wir also:

$$(-1)^{|F(\sigma)|} = (-1)^{|F(\tau_1)| + |F(\tau_2)| + \dots + |F(\tau_k)|}$$

Jede Transposition hat aber eine ungerade Anzahl an Fehlständen: Für $x < y$ in $\{1, 2, \dots, n\}$ und die Transposition $\tau = (xy)$ gilt nämlich:

$$F(\tau) = \{(x, y)\} \cup \left(\bigcup_{x < i < y} \{(x, i), (i, y)\} \right)$$

und daher $\operatorname{sgn}(\tau) = (-1)^{|F(\tau)|} = (-1)^{1 + 2(y - x - 1)} = -1$.
Insgesamt erhalten wir also dank der 'Multiplikativität' der Vorzeichenfunktion:

$$(-1)^{|F(\sigma)|} = (-1)^{|F(\tau_1)| + |F(\tau_2)| + \dots + |F(\tau_k)|} = (-1)^k$$

Und daher wie gewünscht:

$$|F(\sigma)| \equiv k \mod 2$$

Anmerkung: Die Vorzeichenfunktion kann man also auf zwei verschiedene äquivalente Arten definieren: Entweder als (-1) hoch die Anzahl der Fehlstände von σ, oder als (-1) hoch k, wenn man σ als Verkettung von k Transpositionen darstellen kann. Die zweite Definition ist jedoch nicht a-priori wohldefiniert, da nicht im Vorhinein klar ist, dass man eine gegebene Permutation immer nur entweder als Verkettung von gerade vielen oder als Verkettung von ungerade vielen Transpositionen schreiben kann. Diese Aufgabe zeigt jedoch, dass dies sehr wohl der Fall ist, und gibt damit eine einfache Art, wie man das Vorzeichen einer gegebenen Permutation in Zyklenschreibweise berechnen kann:
Den k-Zyklus $(a_1 a_2 \dots a_k)$ kann man als Verkettung von $k - 1$ Transpositionen schreiben:

$$(a_1 a_2 \dots a_k) = (a_1 a_k) \dots (a_1 a_3)(a_1 a_2)$$

Daher gilt $\operatorname{sgn}((a_1 a_2 \dots a_k)) = (-1)^{k-1}$. Da die Vorzeichenfunkion wie in Lösung 2 besprochen 'multiplikativ' ist, gilt daher:

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{\text{Anzahl der Zyklen gerader Länge in der Zyklenschreibweis von } \sigma}$$

Aufgabe 4.

Sei $A = \{\sigma \in S_n \mid \sigma \text{ hat nur genau ein lokales Maximum}\}$ und sei $P = \{M \subseteq \{1, 2, \dots, n-1\}\}$ die Menge der Teilmengen von $\{1, 2, \dots, n-1\}$, wobei sowohl die leere Menge als auch $\{1, 2, \dots, n-1\}$ selbst als Teilmengen von $\{1, 2, \dots, n-1\}$ gelten.
Da jede Permutation $\sigma \in S_n$ bei $\sigma^{-1}(n)$ ein lokales Maximum hat, ist $\sigma^{-1}(n)$ das einzige lokale Maximum jeder Permutation in A. Wir betrachten nun, welche Werte in $\{1, 2, \dots, n-1\}$ die Permutation σ vor n annimmt. Dazu definieren wir

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow P \\ \sigma &\longmapsto f(\sigma) = \{\sigma(i) \mid 1 \leq i < \sigma^{-1}(n)\}. \end{aligned}$$

Wir werden zeigen, dass f eine Bijektion ist. Dazu zeigen wir zuerst Surjektivität und dann Injektivität.

- *Surjektivität:* Sei $M \in P$. OBdA schreiben wir $M = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, n-1\}$ mit $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ und

  $$\{1, 2, \dots, n-1\} \setminus \{a_1, \dots, a_k\} = \{b_1, \dots, b_{n-1-k}\}$$

  mit $b_1 > b_2 > \cdots > b_{n-1-k}$. (Wenn $M = \emptyset$ dann schreibe $k = 0$.) Definiere die Permutation $\sigma \in S_n$ durch

  $$\sigma(x) = \begin{cases} a_i & \text{wenn } 1 \leq x \leq k \\ n & \text{wenn } x = k+1 \\ b_{i-k-1} & \text{wenn } k+2 \leq x \leq n \end{cases}$$

  Dann ist σ streng monoton steigend auf $\{1, 2, \dots, k+1\}$ und streng monoton fallend auf $\{k+1, k+2, \dots, n\}$. Daher hat σ nur genau ein lokales Maximum, nämlich bei $\sigma(k+1) = n$, und es gilt $\sigma \in A$. Per Konstruktion gilt außerdem $f(\sigma) = \{a_1, \dots, a_k\} = M$.

  Da $M \in P$ beliebig war, ist f surjektiv.

- *Injektivität:* Sei $\sigma \in A$ und $f(\sigma) = \{a_1, \dots, a_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, n-1\}$. OBdA sei wieder $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ und

  $$\{1, 2, \dots, n-1\} \setminus \{a_1, \dots, a_k\} = \{b_1, \dots, b_{n-1-k}\}$$

  mit $b_1 > b_2 > \cdots > b_{n-1-k}$.
  Da $\sigma \in A$ das einzige lokale Maximum bei $\sigma(k+1) = n$ hat, muss σ streng monoton steigend auf $\{1, 2, \dots, k+1\}$ und streng monoton fallend auf $\{k+1, k+2, \dots, n\}$ sein. Daher muss gelten

  $$\sigma(x) = \begin{cases} a_i & \text{wenn } 1 \leq x \leq k \\ n & \text{wenn } x = k+1 \\ b_{i-k-1} & \text{wenn } k+2 \leq x \leq n \end{cases}$$

  Daher ist $\sigma \in A$ vollständig und eindeutig durch $f(\sigma)$ bestimmt und f ist injektiv.

Da $f : A \to P$ bijektiv ist, gilt $|A| = |P|$. Die Anzahl der Teilmengen einer m-elementigen Menge ist 2^m, daher gilt $|P| = 2^{n-1}$.
Es gibt also 2^{n-1} Permutationen in S_n, die genau ein lokales Maximum haben.

Aufgabe 5.

(a) Hier ist es nützlich, die Reihenfolge der Summierung zu tauschen:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} kp_n(k) &= \sum_{\sigma\in S_n} (\text{Anzahl der Fixpunkte von } \sigma)\\ &= |\{(\sigma,x)\in S_n\times\{1,2,\ldots,n\} \;\mid\; \sigma(x)=x\}|\\ &= \sum_{x=1}^{n}(\text{Anzahl der } \sigma\in S_n \text{ mit Fixpunkt } x)\end{aligned}$$

Für ein gegebenes $x\in\{1,2,\ldots,n\}$ gibt es aber genau $(n-1)!$ Permutationen $\sigma\in S_n$ mit $\sigma(x)=x$, da nur noch die $(n-1)$ Elemente $\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{x\}$ permutiert werden. Daher gilt wie benötigt:

$$\sum_{k=0}^{n} kp_n(k) = \sum_{x=1}^{n}(\text{Anzahl der } \sigma\in S_n \text{ mit Fixpunkt } x) = \sum_{x=1}^{n}(n-1)! = n\cdot(n-1)! = n!$$

(b*) Wir schreiben zuerst die Lösung für (a) auf eine etwas andere Art auf, die wir dann für (b) verallgemeinern können:

Für jedes $(\sigma,x)\in S_n\times\{1,2,\ldots,n\}$ definieren wir

$$f(\sigma,x)=\begin{cases}1 & \text{wenn } \sigma(x)=x\\ 0 & \text{anderenfalls}\end{cases}$$

Dann gilt

$$\sum_{k=0}^{n} kp_n(k) = \sum_{\sigma\in S_n}\sum_{x=1}^{n} f(\sigma,x) = \sum_{x=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_n} f(\sigma,x)$$

und der Trick in (a) bestand darin, die Reihenfolge der Summierung zu vertauschen.

Wir bestimmen jetzt auf ähnliche Art zuerst $\sum_{k=0}^{n} k^2p_n(k)$. Dazu definieren wir für jedes $(\sigma,x)\in S_n\times\{1,2,\ldots,n\}$:

$$g(\sigma,x)=\begin{cases}k & \text{wenn } \sigma(x)=x \text{ und } \sigma \text{ genau } k \text{ Fixpunkte hat}\\ 0 & \text{wenn } \sigma(x)\neq x\end{cases}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2p_n(k) &= \sum_{\sigma\in S_n}\sum_{x=1}^{n} g(\sigma,x)\\ &= \sum_{x=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_n} g(\sigma,x)\\ &= \sum_{x=1}^{n}\sum_{\substack{\sigma\in S_n\\ \sigma(x)=x}} (\text{Anzahl der Fixpunkte von } \sigma)\end{aligned}$$

Die Permutationen $\sigma \in S_n$ mit $\sigma(x) = x$ entsprechen aber eins-zu-eins den Permutationen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{x\}$. Diese wiederum entsprechen eins-zu-eins den $(n-1)$-stelligen Permutationen S_{n-1}. Die Anzahl der Fixpunkte von σ ist dann eins plus die Anzahl der Fixpunkte der Beschränkung von σ auf $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{x\}$. Daher gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^2 p_n(k) &= \sum_{x=1}^{n} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(x)=x}} (\text{Anzahl der Fixpunkte von } \sigma) \\
&= \sum_{x=1}^{n} \sum_{\tilde{\sigma} \in S_{n-1}} (1 + \text{Anzahl der Fixpunkte von } \tilde{\sigma}) \\
&= \sum_{x=1}^{n} \left(|S_{n-1}| + \sum_{\tilde{\sigma} \in S_{n-1}} (\text{Anzahl der Fixpunkte von } \tilde{\sigma}) \right) \\
&= \sum_{x=1}^{n} \left((n-1)! + \sum_{k=0}^{n-1} k p_{n-1}(k) \right)
\end{aligned}$$

Aus (a) wissen wir:

$$\sum_{k=0}^{n-1} k p_{n-1}(k) = (n-1)!$$

Insgesamt erhalten wir also:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 p_n(k) = \sum_{x=1}^{n} \left((n-1)! + \sum_{k=0}^{n-1} k p_{n-1}(k) \right) = \sum_{x=1}^{n} 2(n-1)! = 2n!$$

Zu guter Letzt bestimmen wir noch $\sum_{k=0}^{n} p_n(k)$. Jede Permutation in S_n wird von genau einer der Zahlen $p_n(0), p_n(1), \ldots, p_n(n)$ gezählt, daher gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} p_n(k) = |S_n| = n!$$

Unsere Teilergebnisse sind also:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 p_n(k) = 2n! \qquad \sum_{k=0}^{n} k p_n(k) \overset{\text{(a)}}{=} n! \qquad \sum_{k=0}^{n} p_n(k) = n!$$

Das setzen wir zusammen und erhalten wie gewünscht:

$$\sum_{k=0}^{n} (k-1)^2 p_n(k) = \sum_{k=0}^{n} (k^2 - 2k + 1) p_n(k) = 2n! - 2n! + n! = n!$$

Bemerkung: Mit dem gleichen Trick kann man induktiv $\sum_{k=0}^{n} k^r p_n(k)$ für alle $r \in \mathbb{N}$ berechnen. Man erhält dann $\sum_{k=0}^{n} k^r p_n(k) = a_r n!$ für rekursiv bestimmbare Koeffizienten $a_r \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 6.

Beweis durch Widerspruch: Nehmen wir an, es gibt keine zwei verschiedenen $\alpha, \beta \in S_n$, sodass $S(\alpha) - S(\beta)$ durch $n!$ teilbar ist.

Es gibt $n!$ Permutationen in S_n und $n!$ verschiedene Restklassen modulo $n!$. Da $S(\alpha) - S(\beta)$ für keine zwei verschiedenen $\alpha, \beta \in S_n$ durch $n!$ teilbar ist, gilt $S(\alpha) \not\equiv S(\beta) \mod n!$, wenn $\alpha \neq \beta$. Daher kommt jede Restklasse modulo $n!$ in der Menge $\{S(\alpha) \mid \alpha \in S_n\}$ genau einmal vor und es gilt:

$$\sum_{\alpha \in S_n} S(\alpha) \equiv \sum_{i=0}^{n!-1} i = \frac{n!(n!-1)}{2} \mod n! \qquad (\star)$$

Auf der anderen Seite gibt es für jedes Paar $(i,j) \in \{1,2,\ldots,n\}^2$ genau $(n-1)!$ Permutationen $\sigma \in S_n$, sodass $\sigma(i) = j$ gilt. Das bedeutet:

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha \in S_n} S(\alpha) &= \sum_{\alpha \in S_n} \sum_{i=1}^{n} k_i \alpha(i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} k_i \sum_{\alpha \in S_n} \alpha(i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} k_i (n-1)! \sum_{j=1}^{n} j \\
&= \sum_{i=1}^{n} k_i (n-1)! \frac{n(n+1)}{2} = n! \frac{(n+1)}{2} \sum_{i=1}^{n} k_i
\end{aligned}$$

Da $n > 1$ ungerade ist, ist $\frac{(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$. Da außerdem alle k_i ganze Zahlen sind, folgt:

$$\sum_{\alpha \in S_n} S(\alpha) \equiv 0 \mod n!$$

Vergleicht man das mit $(\star)$, muss gelten:

$$n! \mid \frac{n!(n!-1)}{2} \quad \Longrightarrow \quad 2 \mid n! - 1$$

Wegen $n > 1$ ist $n!$ aber gerade, weshalb $n! - 1$ ungerade ist. Widerspruch!
Daher muss es zwei verschiedene $\alpha, \beta \in S_n$ geben, sodass $S(\alpha) - S(\beta)$ durch $n!$ teilbar ist.

Aufgabe 7.

(a) Allgemein gilt $|x| = \pm x$. Daher ist

$$D(\pi) = \pm(\pi(1) - 1) \pm (\pi(2) - 2) \pm \cdots \pm (\pi(n) - n) \qquad (\dagger)$$

Da $\pi \in S_n$ außerdem eine Bijektion ist, gilt $\{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)\} = \{1, 2, \ldots, n\}$ und daher:

$$D(\pi) = \pm 1 \pm 1 \pm 2 \pm 2 \pm \cdots \pm n \pm n \qquad (\dagger\dagger)$$

Dabei ist genau die Hälfte der Vorzeichen $+$ und die andere Hälfte $-$. Maximal ist die Summe genau dann, wenn die obere Hälfte dieser $2n$ Zahlen das Vorzeichen $+$ hat, und die untere Hälfte das Vorzeichen $-$. Da $n > 1$ ungerade ist, ist die untere Hälfte $\left(1, 1, 2, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$

und die obere Hälfte ist $\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}, \frac{n+3}{2}, \ldots, n-1, n-1, n, n\right)$. Daher gilt wie gewünscht:

$$\begin{aligned}
D(\pi) &\leq -1-1-2-2-\cdots-\frac{n-1}{2}-\frac{n-1}{2}-\frac{n+1}{2} \\
&\quad +\frac{n+1}{2}+\frac{n+3}{2}+\frac{n+3}{2}+\ldots(n-1)+(n-1)+n+n \\
&= -2\left(\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} i\right)+2\left(\sum_{i=\frac{n+3}{2}}^{n} i\right) \\
&= -2\cdot\left(\frac{\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}+1\right)}{2}\right)+2\cdot\left(\frac{n(n+1)}{2}-\frac{\frac{n+1}{2}\left(\frac{n+1}{2}+1\right)}{2}\right) \\
&= \frac{n^2-1}{2}
\end{aligned}$$

(b) Damit $D(\pi)$ maximal ist und in (a) Gleichheit gilt, müssen in (††) die Zahlen $\left(1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}\right)$ zweimal mit $-$ vorkommen und die Zahlen $\left(\frac{n+3}{2}, \ldots, n-1, n\right)$ zweimal mit $+$. Wir benötigen in (†) also:

$$\begin{aligned}
D(\pi) &= +(\pi(1)-1)+(\pi(2)-2)+\cdots+\left(\pi\left(\frac{n-1}{2}\right)-\frac{n-1}{2}\right) \\
&\quad \pm\left(\pi\left(\frac{n+1}{2}\right)-\frac{n+1}{2}\right) \\
&\quad -\left(\pi\left(\frac{n+3}{2}\right)-\frac{n+3}{2}\right)-\cdots-(\pi(n-1)-(n-1))-(\pi(n)-n)
\end{aligned}$$

Daher muss gelten:

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{n+3}{2}, \frac{n+5}{2}, \ldots, n-1, n\right\} \subseteq \left\{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi\left(\frac{n+1}{2}\right)\right\} \\
\text{und } &\left\{1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}\right\} \subseteq \left\{\pi\left(\frac{n+1}{2}\right), \pi\left(\frac{n+3}{2}\right), \ldots, \pi(n-1), \pi(n)\right\}
\end{aligned}$$

Beachte, dass die Mengen auf der linken Seite jeweils $\frac{n-1}{2}$ Elemente haben, und die Mengen auf der linken jeweils $\frac{n+1}{2}$. Wir unterscheiden nun nach $k := \pi\left(\frac{n+1}{2}\right)$.

- **Fall 1:** $k \leq \frac{n-1}{2}$. Dann muss gelten

$$\left\{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi\left(\frac{n-1}{2}\right)\right\} = \left\{\frac{n+3}{2}, \frac{n+5}{2}, \ldots, n-1, n\right\} \tag{1a}$$

$$\Longrightarrow \left\{\pi\left(\frac{n+3}{2}\right), \ldots, \pi(n-1), \pi(n)\right\} = \left\{1, 2, \ldots, \frac{n+1}{2}\right\} \setminus \{k\} \tag{1b}$$

  da π bijektiv ist.

- **Fall 2:** $k \geq \frac{n+1}{2}$. Dann muss gelten

$$\left\{\pi\left(\frac{n+3}{2}\right), \ldots, \pi(n-1), \pi(n)\right\} = \left\{1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}\right\} \tag{2a}$$

$$\Longrightarrow \left\{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi\left(\frac{n-1}{2}\right)\right\} = \left\{\frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}, \ldots, n-1, n\right\} \setminus \{k\} \tag{2b}$$

  da π bijektiv ist.

Die Bedingung

$$\left[k \leq \frac{n-1}{2} \text{ und } (1a) \text{ und } (1b)\right] \text{ oder } \left[k \geq \frac{n+1}{2} \text{ und } (2a) \text{ und } (2b)\right] \qquad (\triangle)$$

ist also *notwendig*, damit $D(\pi)$ maximal ist.

Wie man leicht nachprüft, ist die Bedingung $(\triangle)$ auch *ausreichend*, damit $D(\pi)$ maximal ist: Denn wenn $(\triangle)$ gilt, dann kommen in $(\dagger)$ automatisch die Zahlen $\left(1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}\right)$ zweimal mit dem Vorzeichen $-$ und die Zahlen $\left(\frac{n+3}{2}, \ldots, n-1, n\right)$ zweimal mit dem Vorzeichen $+$ vor. Da die Vorzeichen $+$ und $-$ gleich oft in $(\dagger)$ vorkommen, muss außerdem $\frac{n+1}{2}$ einmal mit $+$ und einmal mit $-$ vorkommen, sodass $D(\pi) = \frac{n^2-1}{2}$ gilt (wie in (a) ausgerechnet).

Insgesamt gilt also:

$$D(\pi) = \frac{n^2-1}{2} \iff \pi \text{ erfüllt } (\triangle)$$

Wir müssen also die Anzahl der Permutationen $\pi \in S_n$ zählen, die $(\triangle)$ erfüllen.

Sobald k fixiert ist, gibt es sowohl in Fall 1 als auch in Fall 2 $\left(\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right)^2$ Permutationen, die $(\triangle)$ erfüllen. In Fall 1 gibt es $\frac{n-1}{2}$ verschiedene Möglichkeiten für k und in Fall 2 gibt es $\frac{n+1}{2}$ verschiedene Möglichkeiten für k. Daher gibt es insgesamt

$$\frac{n-1}{2}\left(\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right)^2 + \frac{n+1}{2}\left(\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right)^2 = n\left(\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right)^2$$

Permutationen $\pi \in S_n$, sodass $D(\pi) = \frac{n^2-1}{2}$ gilt.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

Mathematisches Allgemeinwissen zum Thema Permutationen.

Aufgabe 2.

Mathematisches Allgemeinwissen zum Thema Permutationen.

Aufgabe 3.

Mathematisches Allgemeinwissen zum Thema Permutationen.

Aufgabe 4.

aus [2], *IMO 1986 Longlist*, Aufgabe 27. Übersetzung von Daniel Holmes und dem MmF-Team.

Aufgabe 5.

(a) aus [2], *IMO 1987*, Aufgabe 1 bzw. *IMO 1987 Shortlist*. Übersetzung von Daniel Holmes und dem MmF-Team.

(b*) aus [2], *IMO 1987 Shortlist*, Aufgabe 16. Übersetzung von Daniel Holmes und dem MmF-Team.

Aufgabe 6.

aus [2], *IMO 2001*, Aufgabe 4. Übersetzung von Daniel Holmes und dem MmF-Team.

Aufgabe 7.

aus [1], *Advanced Problems*, Aufgabe 2. Aufgabe und Lösungsvorschlag von Titu Andreescu, vorgeschlagen für USAMO 1999. Übersetzung von Daniel Holmes und dem MmF-Team.

Literatur

[1] T. Andreescu and Z. Feng. *102 Combinatorial Problems. From the Training of the USA IMO Team.* Birkhäuser, 2003.

[2] D. Djukić, V. Janković, I. Matić, and N. Petrović. *The IMO Compendium: A Collection of Problems Suggested for International Mathematical Olympiads 1959-2009.* Springer, 2011.