52. Austrian Math Olympiads (ÖMO)

Special Math. Olympiad course "'Mathematik macht Freu(n)de"' – Problem sheet for Feb, 13th, 2021

Procedure

This problem sheet was created by Morteza Saghafian.
Please send questions and (sketches of) proofs via E-Mail.
We provide hints to selected problems on Feb, 9th, 2021. Morteza Saghafian addresses the problems at the virtual course on Feb, 13th, 2021: 10:00–11:45. You can discuss and present your solutions there. Afterwards we provide selected solutions of the problems and give references.
Contact us, if you want to take part in this course. You are always welcome!

Iranian Combinatorics Olympiads (ICO)

Problems

Problem 1. (Increasing Difference) An einem Fußballturnier nehmen 2020 Teams teil. Jedes Team spielt gegen jedes andere Team genau einmal. Keines der Spiele endet unentschieden, das siegende Team erhält 3 Punkte, das andere Team 0 Punkte. Die Mannschaften werden nach ihren erreichten Punkten sortiert, bei Punktegleichheit entscheidet die Tordifferenz, welche durch die Anzahl der erzielten minus der Anzahl der erhaltenen Tore bestimmt ist.
Ist es möglich, dass die Tordifferenz in dieser Liste von oben nach unten strikt zunimmt?

Problem 2. (Friendly Game) Morteza und Amirreza spielen das folgende Spiel: Zuerst werfen beide unabhängig voneinander jeweils 100 Mal hintereinander einen fairen Würfel und bilden aus den erhaltenen Würfelergebnissen eine 100-stellige Zahl, die aus den Ziffern $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ besteht, wobei die erste Ziffer dem ersten Würfelergebnis entspricht, die zweite dem zweiten usw. Beide Spieler kennen die erhaltene Zahl des anderen Spielers nicht.
Danach wählen die beiden gleichzeitig eine Stelle der jeweils anderen Zahl. Sind diese beiden Ziffern gleich 6, so gewinnen beide Spieler, andernfalls verlieren sie.
Haben die beiden eine Spielstrategie, sodass die zu erwartende Gewinnwahrscheinlichkeit über $\frac{1}{36}$ liegt?

Problem 3. (Intersecting Chords) Auf einem Kreis sind 1399 Punkte und einige Sehnen zwischen ihnen gegeben.

a) In jedem Schritt können zwei Sehnen PQ und RS gewählt werden, die einander in einem Punkt (verschieden von P, Q, R oder S) schneiden. Genau eine der beiden Sehnen wird entfernt und durch die Sehnen PS, PR, QS, und QR ersetzt (existieren bereits einige dieser Sehnen, so bleiben sie erhalten). Sei s die kleinste Anzahl an Sehnen nach einigen Schritten.

Finde unter allen möglichen Startkonstellationen von Sehnen den maximalen Wert von s.

b) In jedem Schritt können zwei Sehnen PQ und RS gewählt werden, die einander in einem Punkt (verschieden von P, Q, R oder S) schneiden.. Beide Sehnen werden entfernt und durch die Sehnen PS, PR, QS, und QR ersetzt (existieren bereits einige dieser Sehnen, so bleiben sie erhalten). Sei s die kleinste Anzahl an Sehnen nach einigen Schritten.

Finde unter allen möglichen Startkonstellationen von Sehnen den maximalen Wert von s.

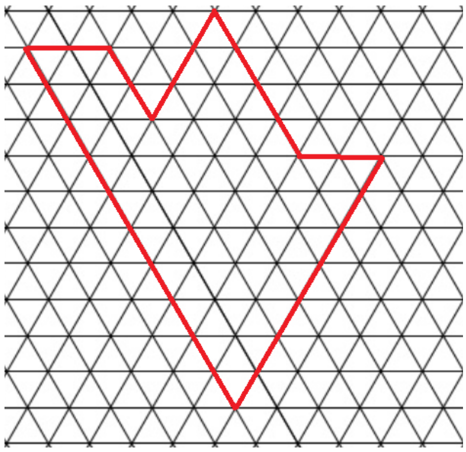
Problem 4. (Common Friend) Bei einer Party befinden sich 99 Personen und jeder von ihnen hat mindestens 81 und höchstens 90 Freunde.
Man beweise, dass es eine Gruppe von 10 Personen gibt, die dieselbe Anzahl an Freunden haben und die mindestens einen gemeinsamen Freund haben.
(*Hinweis:* Freundschaft ist eine symmetrische Bedingung. Ist Person A mit Person B befreundet, so auch Person B mit Person A.)

Problem 5. (Way to Success) Die Unendlichkeit ist Abol's Weg zum Erfolg!
Wir betrachten eine horizontale Achse, auf der alle ganzzahligen Punkte mit den ganzen Zahlen markiert sind. Der Punkt 0 bedeutet Abol's Misserfolg. In jedem anderen Punkt befindet sich eine Ampel. Jede Ampel leuchtet entweder grün, gelb oder rot. Abol startet im Punkt 1 und je größer die Zahl des Punktes ist, desto näher kommt er zum Erfolg. In jedem Schritt passiert das folgende:

Abol betrachtet die Farbe der Ampel im aktuellen Punkt. Er macht auf der Achse einen Schritt nach rechts, wenn das Licht der Ampel grün oder gelb ist. Wenn die Ampel rot zeigt, dann bewegt er sich auf Achse einen Schritt nach links. Nachdem sich Abol bewegt ändert sich das Licht, das er gerade gesehen hat von grün zu gelb, von gelb zu rot und von rot auf grün. Wenn Abol erstmalig im Punkt 1 ein rotes Licht sieht, dann bleibt er stehen (und das Licht ändert sich). Wenn er zum zweiten Mal im Punkt 1 ein rotes Licht sieht, dann gibt er auf, geht zu Punkt 0 und verharrt dort für immer.

Man zeige, dass Abol irgendwann auf jede positive ganze Zahl auf der Achse treffen kann.

Problem 6. (Triangular Grid) Gegeben ist ein Raster, der aus lauter gleichseitigen Dreiecken mit Seitenlänge 1 besteht. Sei $\mathcal{P}$ ein einfaches (d.h. nicht überschlagenes) Polygon, dessen Seiten auf den Rasterlinien liegt und dessen Umfang 1399 Einheiten beträgt.
Man zeige, dass $\mathcal{P}$ mindestens einen Winkel der Größe 120° oder einen Winkel der Größe 240° hat.



Problem 7. (Red Coin) Seyed besitzt 998 weiße Münzen, die auf beiden Seiten weiß sind, eine rote Münze, die auf beiden Seiten rot ist und eine Spezialmünze, die auf einer Seite weiß und auf der anderen Seite rot ist. Er kann die Farben der Münzen zwar nicht sehen, aber er besitzt einen Scanner. Platziert er eine beliebige Anzahl an Münzen, die jeweils auf einer der Seite liegen, so erfährt er, ob alle Seiten, die die Glasscheibe des Scanners berühren, weiß sind oder nicht.
Man zeige, dass Seyed die rote Münze durch maximal 17-maliges Scannen finden kann.

Hints to selected problems

Aufgabe 1. Nimm an, dass es möglich ist. Weise nach, dass es dann keine zwei Teams mit derselben Anzahl an Siegen geben kann.

Aufgabe 2: Nimm an, dass sich die beiden Spieler auf die Strategie einigen, die jeweils erste Ziffer des anderen Spielers zu wählen und begründe, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit dann 1/36 ist. Ist in diesem Fall Morteza's erste Stelle nicht die Ziffer 6, dann könnte er eine (mit Amirreza vereinbarte) andere Strategie verfolgen, statt die erste Stelle zu wählen und davon ausgehen, dass Amirezza ebenfalls diese Strategie anwendet, um eine zusätzliche, positive Gewinnwahrscheinlichkeit zu erhalten...

Aufgabe 3: Führe für beide Fälle eine vollständige Induktion durch.

Aufgabe 4: Weise nach, dass es im „Freundschaftsgraphen" mindestens 10 Knoten von Grad 90 gibt, wenn es keine Menge von 10 Knoten gibt, die dieselbe Anzahl k an Nachbarn haben mit $k \in \{81, 82, \dots, 89\}$ und die mindestens einen gemeinsamen Nachbarn haben.

Aufgabe 5: Nimm das Gegenteil an und versuche, die maximale Zahl, die Abol erreicht, zu bestimmen.

Aufgabe 6: Färbe die Punkte des Raster geschickt mit drei Farben.

Aufgabe 7: Idee: Teile die Münzen geschickt in zwei Teilmengen, und finde dort die rote Münze (durch höchstens 2-maliges Scannen). Argumentiere dann mittels vollständiger Induktion für diese Teilmenge. Der entscheidende Punkt ist die Wahl der Größen der beiden Teilmengen.

Proposed solution to selected problems

Proposed solutions from Morteza Saghafian, edited by the MmF-Team

Aufgabe 1.

Wir nehmen an, dass diese Konstellation möglich ist. Keine zwei Teams können dieselbe Anzahl an Spielen gewonnen haben, da das dem strikten Anstieg der Tordifferenz widersprechen würde. Jedes Team gewinnt mindestens 0 und höchstens 2019 Spiele. Damit gewinnt das Team, das am Ende Platz k belegt, notwendigerweise genau $2019 - k$ Spiele.
Somit verliert das letzte Team der Liste alle Spiele und die Tordifferenz ist somit sicher negativ. Wegen der Voraussetzung ist somit die Tordifferenz jedes Teams negativ. Da die Tordifferenz über alle Teams addiert genau 0 ergeben muss, ist das ein Widerspruch. (Ein Widerspruch kann auch durch Betrachtung des ersten Teams der Liste herbeigeführt werden: da dieses Team alle Spiele gewonnen hat, kann es keine negative Tordifferenz haben, ein Widerspruch.)

Aufgabe 2.

Die Antwort ist JA!
Die Spielstrategie ist, dass jeder Spieler die Position des ersten Auftretens seiner Ziffer 6 wählt (und die Position 100, falls die Zahl keine Ziffer 6 enthält). Die Wahrscheilichkeit, dass beide dieselbe Stelle k auswählen, ist

$$\underbrace{\left(\underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^k}_{\text{ersten } k\text{–1 Stellen sind nicht 6}} \times \underbrace{\frac{1}{6}}_{k\text{-te Stelle ist 6}}\right)^2}_{\text{gilt für beide Spieler}}.$$

Summieren wir über jede mögliche Stelle k, so erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{100}\left(\left(\frac{5}{6}\right)^k \times \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36} + \sum_{k=2}^{100}\left(\left(\frac{5}{6}\right)^k \times \frac{1}{6}\right)^2 > \frac{1}{36}.$$

Aufgabe 3.

Wir bezeichnen zwei Punkte am Kreis als *benachbart*, wenn zwischen ihnen kein weiterer der gegebenen Punkte liegt. Weiters nennen wir eine Sehne *Seite*, falls sie zwei benachbarte Punkte am Kreis verbindet und *Diagonale* andernfalls.

a) Wir zeigen, dass die Antwort $s = 2n-3$ ist, wenn n Punkte am Kreis gegeben sind. Die Antwort wird also $s = 2795$ sein.

Betrachte ein konvexes n-gon mit einer beliebigen Triangulierung (eine Triangulierung ist die Unterteilung des Polygons in Dreiecke mittels einander paarweise nicht-schneidender Diagonalen). Eine Triangulierung besteht aus exakt $n - 3$ Diagonalen und den n Seiten des n-gons. Da die Diagonalen einander paarweise nicht schneiden, kann kein weiterer Zug ausgef"uhrt werden, also bleibt die Zahl der Sehnen in diesem Fall konstant $2n - 3$.

Wir zeigen nun, dass es für jede Startkonstellation an Sehen nach ein paar Schritten zu einer Konstellation ohne einander schneidender Sehnen kommen kann. In diesem Fall ist die Anzahl der gezeichneten Sehnen sicher nicht größer als $2n-3$, da eine Triangulierung einer maximalen Menge einander paarweise nicht (im Inneren) schneidender Sehnen entspricht.

Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion über n, der Anzahl der gegebenen Punkte am Kreis.

Induktionsbasis: Sei $n = 3$. Dann ist die maximale Anzahl an Sehnen gleich $3 = 2 \cdot 3 - 3$ (Schnittpunkte treten nicht auf).

Induktionsvoraussetzung (I.V.): Für jede Anzahl an Punkten $k < n$ gilt: $s = 2 \cdot k - 3$.

Induktionsbehauptung: Für n Punkte gilt $s = 2n - 3$.

Induktionsschritt: Wie wir bereits gezeigt haben, gilt jedenfalls die Abschätzung $s \geq 2n-3$, da im Falle einer Triangulierung, die ja eine Startkonstellation sein kann, $s = 2n-3$ gilt. Im Falle, dass es zu Beginn keine Diagonale gibt, ist kein Zug möglich und damit ist in all diesen Fällen die Gleichung $s = 2n-3$ nicht verletzt, da es nur n Seiten gibt und $2n-3 \geq n$ gilt. Wir können also annehmen, dass es eine Diagonale PQ gibt. Wir führen nun erlaubte Züge aus, solange es Diagonalen RS gibt, die PQ schneiden und entfernen diese Diagonalen RS. Also gibt es nach Ausführen dieser Züge keine Sehnen, die PQ schneiden und wir können die Induktionsvoraussetzung für beide Teilpolygone anwenden, die durch PQ aufgeteilt werden: o.B.d.A. hat das Teilpolygon T' auf der einen Seite $k+2$ Eckpunkte (inklusive P und Q) mit $s' = 2 \cdot (k+2) - 3$ und das Teilpolygon T'' auf der anderen Seite $n-k$ Eckpunkte mit $s'' = 2 \cdot (n-k) - 3$. Da bei beiden Werten s' und s'' die Diagonale PQ als Seite mitgerechnet wird, gilt wie behauptet

$$s = s' + s'' - 1 = 2 \cdot (k+2) - 3 + 2 \cdot (n-k) - 3 - 1 = 2 \cdot n - 3. \quad \square$$

b) Die Antwort ist wiederum $2n-3$ und die Beweisführung ähnlich zu **a)**.

Zuerst beweisen wir mittels vollständiger Induktion, dass für jede Anzahl an Punkten $n \geq 4$ gilt: Gibt es keine einander schneidende Diagonalen, dann gibt es zwei nicht benachbarte Punkte, die nicht Endpunkte einer (beliebigen) Diagonale sind.

Induktionsbasis: Sei $n = 4$. Die Aussage ist klarerweise erfüllt, da maximal eine Diagonale auftreten kann und beide anderen Punkte nicht Endpunkte einer Diagonale sind.

Induktionsvoraussetzung (I.V.): Für jede Anzahl an Punkten $4 \leq k < n$ gilt: Gibt es keine einander schneidende Diagonalen, dann gibt es zwei nicht benachbarte Punkte, die nicht Endpunkte einer (beliebigen) Diagonale sind.

Induktionsbehauptung: Für n Punkte gilt die Aussage ebenfalls.

Induktionsschritt: Gibt es keine Diagonale, so ist die Aussage erfüllt. Andernfalls wähe eine Diagonale PQ, die von keiner anderen Diagonale geschnitten wird. Die Diagonale PQ teilt die Punkte am Kreis in zwei Teilmengen T' und T'' auf, die neben P und Q jeweils mindestens einen weiteren Punkt enthalten (und die andere Menge alle übrigen) und darüber hinaus einige Sehnen zwischen den Punkten, die sich allerdings nur in derselben Menge befinden können. Besteht eine der beiden Mengen nur aus drei Punkten (also genau einem weiteren Punkt neben P und Q), dann geht von diesem Punkt sicher keine Diagonale aus. Besteht eine Menge aus $k \geq 4$ Punkten, dann gibt es nach Induktionsvoraussetzung in der Menge 2 nicht benachbarte Punkte, die nicht Endpunkte einer Diagonale sind. Da P und Q sowohl in T' als auch in T'' benachbart sind, gibt es also in jeder der beiden Teilmengen mindestens einen von P und Q verschiedenen Punkt, der nicht Eckpunkt einer Diagonale ist. Diese beiden Punkte liegen "‘auf verschiedenen Seiten"’ von PQ, stimmen also sicher nicht überein. Somit haben wir in jedem möglichen Fall zwei

Punkte mit der gewünschten Eigenschaft gefunden und somit ist die Aussage auch fü n Punkte gültig. $\square$

Widmen wir uns nun direkt der Aufgabenstellung.

Wiederum führen wir den Beweis mittels vollständiger Induktion nach der Anzahl n an Punkten und weisen nach, dass man bei jeder Startkonstellation zu einer Konstellation gelangen kann, bei der es keine einander schneidende Sehnen gibt.

Induktionsbasis: Sei $n = 4$. Es kann maximal 2 Diagonalen geben. Da diese einander schneiden, führen wie einen Zug durch, der alle inneren Schnittpunkte entfernt.

Induktionsvoraussetzung (I.V.): Für jede Anzahl $4 \leq k < n$ an Punkten gilt, dass man bei jeder gegebenen Startkonstellation zu einer Konstellation gelangen kann, bei der es keine einander schneidende Sehnen gibt.

Induktionsbehauptung: Für jede Startkonstellation n Punkte gilt die Aussage ebenfalls.

Induktionsschritt: Wir wählen einen beliebigen Punkt A, den wir (zusammen mit allen ausgehenden Sehnen) ignorieren. Nach Induktionsvoraussetzung kann man die restlichen $n - 1$ Punkte in eine Konstellation überfuhren, in der einander keine der Diagonalen schneiden. Nach obigem Induktionsbeweis befinden sich unter diesen $n - 1$ Punkten mindestens zwei nicht benachbarte, die nicht Endpunkte einer Diagonale sind (zumindest wenn man nur Diagonalen und Seiten dieser $n - 1$ von Punkt A verschiedenen Punkte betrachtet). Mindestens einer davon ist mit dem Punkt A nicht benachbart, diesen Punkt nennen wir B. Wir ignorieren nun den Punkt B (und alle von ihm ausgehenden Sehnen) und wenden die Induktionsvoraussetzung auf die übrigen $n - 1$ Punkte an. Wir halten fest, dass in der nun festgehaltenen Konstellation alle auftretenden Schnittpunkte auf AB liegen. Wir müssen nun zwei Fälle untersuchen: entweder die Sehne AB ist Teil der Startkonstellation oder nicht. Gibt es die Diagonale AB nicht, sind wir fertig. Andernfalls wissen wir aus obiger Induktion angewandt auf die $n-1$ Punkte außer B, dass es einen Punkt $C \neq A$ gibt, der nicht Endpunkt einer Diagonalen ist. Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

I. Die Punkte C und B sind nicht benachbart.

II. Die Punkte C und B sind benachbart, aber C ist nicht mit dem anderen Nachbarn von B verbunden.

III. Die Punkte C und B sind benachbart und C ist mit dem Nachbarn Dvon B verbunden.

In den ersten beiden Fällen folgt das Resultat unmittelbar durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf alle $n - 1$ Punkte außer C, da keine von Punkt C ausgehende Sehne einen Schnittpunkt mit AB hat.

Im letzten Fall führen wir einen Zug mit den beiden einander schneidenden Sehnen AB und CD aus. Danach gibt es keine Diagonale mehr, die den Punkt B als Endpunkt hat. Durch nochmalige Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf alle $n - 1$ Punkte außer B werden alle potenziellen inneren Schnittpunkte gelöscht und der Induktionsbeweis ist abgeschlossen. $\square$

Da im Falle einer Triangulierung $2n - 3$ Sehnen ohne inneren Schnittpunkt gegeben sind (und somit kein Zug möglich ist), gilt wie in **a)**, dass $s = 2n - 3$ ist.

Aufgabe 4.

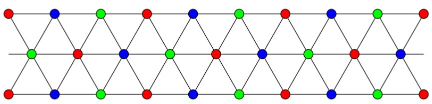
Wir betrachten den "'Freundschaftsgraphen"', in dem die Menge der Knoten die 99 Personen der Party sind und eine Kante zwischen zwei Knoten existiert, wenn diese beiden entsprechenden Personen befreundet sind. Der *Grad* eines Knotens entspricht der Anzahl der Kanten, die den Knoten enthalten.
Die Summe aller Knotengrade eines beliebigen Graphen ist stets gerade, da jede Kante genau zweimal gezählt wird.
Es ist unmöglich, dass jeder Knoten Grad 81 hat, da das die Summe aller Knotengrade 81×99, also ungerade wäre.
Wir zeigen, dass es im Freundschaftsgraphen mindestens 10 Knoten von Grad 90 gibt, wennes keine Menge von 10 Knoten gibt, die dieselbe Anzahl k an Nachbarn haben mit $k \in \{81, 82, \ldots, 89\}$ und die mindestens einen gemeinsamen Nachbarn haben.
Wir nehmen also an, es gäbe weniger als 10 Knoten von Grad 90. Sei v ein Knoten, dessen Grad größer als 81 ist. Sei $N(v)$ die Menge aller Nachbarn von v. Wenn sich unter all den Nachbarn von v mindestens 10 befinden, die dieselbe Anzahl k mit $k \in \{81, 82, \ldots, 89\}$ an Nachbarn haben, dann wären wir fertig. Als gibt es unter den Nachbarn von v maximal 9 von Grad k für jedes k. Da aber $|N(v)| > 9 \times 9$, gibt es in $N(v)$ sicher einen Nachbarn w mit $|N(w)| = 90$. Damit es nicht 10 Nachbarn von w mit derselben Gradanzahl gibt, muss er genau 9 Nachbarn von jedem der möglichen Grade $\{81, 82, \ldots, 89, 90\}$ besitzen. Somit gibt es mindestens 10 Knoten mit Grad 90.
Wir behaupten, diese haben alle einen gemeinsamen Freund: Für jeden Knoten u unter diesen 10 Knoten gibt es genau 9 Knoten, mit denen u nicht verbunden ist. Damit gibt es aber mindestens $99 - 10 \cdot 9 > 1$ Knoten, die mit allen 10 Knoten verbunden sind.

Aufgabe 5.

Wir nehmen das Gegenteil an. Sei S die größte Zahl, die Abol mindestens *zwei* Mal erreicht und anschließend zum linken Nachbarn zurückkommt. Wir bemerken, dass zwischen zwei Schritten, die nach links führen, immer zumindest zwei Schritte liegen, die nach rechts führen, da eine rote Ampel die Farbe wechselt. Also ist Abol zumindest zweimal am Punkt S vorbeigekommen, bevor er zum Punkt S von rechts zurückgekehrt ist. Das bedeutet aber auch, dass Abol mindestens zweimal am Punkt $S+1$ war, um zu S zurückzukehren. Das ist ein Widerspruch zur Maximalität von S.

Aufgabe 6.

Wir nehmen an, es gäbe weder einen Winkel der Größe 120° noch einen Winkel der Größe 240°. Wir färben die Punkte des Rasters in den Farben blau, grün und rot nach folgendem Muster:



Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass die ersten beiden Farben des Polygonzugs rot und blau sind. Schreiten wir den Polygonzug ab, so erhalten wir eine Folge von Farben, in der aufgrund des gewählten Musters keine der Farben zweimal direkt hintereinander vorkommen kann. Aufgrund der Annahme kann in der Folge auch niemals dieselbe Farbe als übernächstes Folgenglied wieder vorkommen, da dies sofort zu einem Winkel der Größe 120° oder 240° führt. Somit gibt es genau eine mögliche Form für die Folge, nämlich

$$\text{rot} \to \text{blau} \to \text{grün} \to \text{rot} \to \text{blau} \to \text{grün} \to \cdots \to \text{grün} \to \text{rot}$$

Das bedeutet allerdings, dass der Umfang des Polygonzugs ein Vielfaches von 3 sein muss, ein

Widerspruch zur Angabe.

Aufgabe 7.

Wir beweisen zunächst die folgenden beiden Lemmata, die wir für den Beweis benötigen.

Lemma 1. Betrachte die Fibonacci-Folge gegeben durch die rekursive Funktionsvorschrift $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ für $n \geq 2$ und die Startwerte $F_1 = F_1 = 2$.
Für jede ganze Zahl $n > 1$ gilt: $F_n \leq 2^{n-2}$.

Proof. Wir beweisen die Aussage mittels vollständiger Induktion.
Induktionsbasis: Sei $n = 2$. $F_2 = 1 \leq 2^{2-2} = 1$.
Induktionsvoraussetzung (I.V.): Für jede ganze Zahl $1 < k \leq n$ gilt: $F_k \leq 2^{k-2}$.
Induktionsbehauptung: $F_{n+1} \leq 2^{n-1}$.
Induktionsschritt:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \leq 2F_n \overset{\text{I.V.}}{\leq} 2 \cdot 2^{n-2} = 2^{n-1}.$$

□

Lemma 2. In einer Menge von n Münzen, die die rote Münze und $n-1$ weiße Münzen enthält, finden wir die rote Münze in höchstens $\lceil \log_2 n \rceil$ Schritten. (Jeder Schritt ist entspricht einmal Scannen)

Proof. Wir beweisen die Behauptung mittels vollständiger Induktion.
Induktionsbasis: Sei $n = 1$. Die Münze ist rot, wir müssen 0 Mal scannen.
Induktionsvoraussetzung (I.V.): Für jede ganze Zahl $1 \leq k \leq n-1$ gilt: Die rote Münze kann unter $k-1$ Münzen in höchstens $\lceil \log_2 k \rceil$ Schritten gefunden werden.
Induktionsbehauptung: Siehe Aussage des Lemmas.
Induktionsschritt: Wir scannen $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ der n Münzen. Wir erfahren, ob diese Menge oder die Menge der übrigen Münzen die rote Münze enthält. Nach Induktionsannahme finden wir die rote Münze in höchstens

$$\left\lceil \log_2 \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) \right\rceil + 1 \leq \lceil \log_2 n \rceil$$

Schritten. □

Wenden wir uns nun der Aufgabenstellung direkt zu. Wir verwenden wie in den Lemmata die folgenden Bezeichnungen: Die Fibonacci-Folge sei definiert durch $F_1 = F_1 = 2$ und $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ für $n \geq 2$. Weiters bezeichnen wir für die Leserlichkeit jedes Mal Scannen als einen Schritt.
Wir wollen mittels vollständiger Induktion beweisen, dass in einer beliebigen Gruppe mit höchstens F_n Münzen, die rote Münze in maximal n Schritten gefunden werden kann, wenn sich in der Gruppe höchstens eine Spezialmünze befindet und alle übrigen Münzen weiße Münzen sind.
Induktionsbasis: Für $n = 1$ und $n = 2$ kann die rote Münze ohne Scannen bzw. in zwei Schritten gefunden werden (BBei $n = 1$ handelt es sich um die rote Münze, bei $n = 2$ muss man eine beliebige der beiden Münzen von beiden Seiten scannen, um sicher festzustellen zu können, ob es sich bei der Betrachteten um die etwaige Spezialmünze handelt. In diesem Fall ist die andere die gesuchte Münze.).
Induktionsvoraussetzung (I.V.): Für jede ganze Zahl $1 \leq k \leq n-1$ gilt: In einer Gruppe mit maximal F_k Münzen, wovon eine die rote Münze ist und maximal eine Münze eine Spezialmünze und der Rest weiße Münzen sind, kann die rote Münze in maximal k Schritten gefunden werden.
Induktionsbehauptung: In einer Gruppe mit maximal F_n Münzen, wovon eine die rote Münze ist und maximal eine Münze eine Spezialmünze und der Rest weiße Münzen sind, kann die rote Münze in maximal n Schritten gefunden werden.

Induktionsschritt: Wir teilen eine Gruppe bestehend aus maximal F_n Münzen in zwei Gruppen A und B auf, wobei A aus maximal F_{n-1} Münzen und B aus maximal F_{n-2} Münzen besteht. Wir scannen alle Münzen der Gruppe B, wobei die folgenden beiden Fälle auftreten können:

Fall 1) Alle Seiten der Gruppe B sind weiß. Dann befindet sich die rote Münze in Gruppe A. Um diese in weiterer Folge zu identifizieren benötigen wir laut I.V. höchstens $n-1$ weitere Schritte.

Fall 2) Es befindet sich eine rote Seite beim ersten Schritt. In diesem Fall drehen wir alle Münzen der Gruppe B um und scannen ein weiters Mal. Es können die folgenden beiden Fälle auftreten:

2.1) Auch diesmal befindet sich eine rote Seite beim zweiten Schritt. Die rote Münze befindet sich also in dieser Gruppe. Nach I.V. finden wir die rote Münze in maximal $n-2$ weiteren Schritten.

2.2) Alle Rückseiten der Gruppe B sind weiß. Dann befindet sich die rote Münze jedenfalls in Gruppe A. Weiters wissen wir nun, dass alle anderen Münzen der Gruppe A sicher weiße Münzen sind (da sich die Spezialmünze in Gruppe B befinden muss). Das sind höchstens $F_{n-1} - 1$ weiße Münzen. Mittels zweiten Lemmas finden wir die rote Münze in maximal $\lceil \log_2(F_n - 1) \rceil$ Schritten. Nach dem ersten Lemma gilt:

$$\lceil \log_2(F_n - 1) \rceil \leq \left\lceil \log_2(2^{n-2} - 1) \right\rceil \leq n - 3.$$

Also finden wir die rote Münze in höchstens $n - 3$ weiteren Schritten.

Somit ist die Behauptung für jeden möglichen Fall bewiesen und der Induktionsbeweis abgeschlossen. Da $F_{17} = 1597 > 1000$, kann die rote Münze durch 17-maliges Scannen jedenfalls gefunden werden.

Sources

Aufgabe 1.

aus [1], *1st Iranian Combinatorics Olympiad*, Aufgabe von Abolfazl Asadi. Lösungsvorschlag von Morteza Saghafian und vom MmF-Team.

Aufgabe 2.

aus [1], *1st Iranian Combinatorics Olympiad*, Aufgabe von Morteza Saghafian. Lösungsvorschlag von Morteza Saghafian und vom MmF-Team.

Aufgabe 3.

aus [1], *1st Iranian Combinatorics Olympiad*, Aufgabe von Afrouz Jabalameli und Abolfazl Asadi, übersetzt vom MmF-Team. Lösungsvorschlag von Morteza Saghafian und vom MmF-Team.

Aufgabe 4.

aus [1], *1st Iranian Combinatorics Olympiad*, Aufgabe von Alireza Alipour, übersetzt vom MmF-Team. Lösungsvorschlag von Morteza Saghafian und vom MmF-Team.

Aufgabe 5.

aus [1], *1st Iranian Combinatorics Olympiad*, Aufgabe von Yaser Ahmadi Fouladi, übersetzt vom MmF-Team. Lösungsvorschlag von Morteza Saghafian und vom MmF-Team.

Aufgabe 6.

aus [1], *1st Iranian Combinatorics Olympiad*, Aufgabe von Seyed Hessam Firouzi, übersetzt vom MmF-Team. Lösungsvorschlag von Morteza Saghafian und vom MmF-Team.

Aufgabe 7.

aus [1], *1st Iranian Combinatorics Olympiad*, Aufgabe von Seyed Reza Hosseini, übersetzt vom MmF-Team. Lösungsvorschlag von Morteza Saghafian und vom MmF-Team.

References

[1] Iranian Combinatorics Olympiad 2020. `https://artofproblemsolving.com/community/c1136520_2020_iranian_combinatorics_olympiad`. (aufgerufen am 15.02.2021).