52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Kurs für Internationale „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 6. März 2021

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Josef Greilhuber und Moritz Hiebler zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 3. März 2021 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Josef Greilhuber und Moritz Hiebler besprechen die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 6. März 2021 von 10:00–11:45 und von 13:15–15:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Inversion

Wir geben hier nur eine sehr knappe Beschreibung der Inversion und lagern wichtige Resultate in die Aufgaben aus. Für eine detailliertere Ausführung siehe das zugehörige ÖMO-Skriptum (für Internationale) oder zum Beispiel hier (für Externe, auf Englisch).

Einführung

Die Inversion (an einem Kreis) ist eine Abbildung der Ebene in sich selbst. Sei dazu ein Kreis k mit Mittelpunkt O und Radius r vorgegeben. Die Inversion ordnet jedem Punkt $P \neq O$ jenen Punkt P' auf der Geraden OP zu, der

$$OP \cdot OP' = r^2 \iff OP' = \frac{r^2}{OP}$$

(mit gerichteten Strecken) erfüllt. Wegen dieser Gleichung ist umgekehrt P das Bild von P' bei Inversion an k. Zweifache Ausführung der Inversion (am selben Kreis) ergibt also wieder denselben Punkt. Wenn die Inversion bekannt ist, werden wir von nun an mit X' immer das Bild des Punktes X unter der Inversion bezeichnen.

Fixpunkte der Inversion sind jene, die $P' = P$ erfüllen, also jene, für die $OP^2 = r^2$ gilt. Das sind genau die Punkte auf k. Bei $|OP| < r$ folgt $|OP'| > r$, d. h. Punkte im Inneren des Kreises haben Bildpunkte außen und umgekehrt.

Man beachte, dass wir das Bild von O nicht definiert haben und das mit obiger Formel auch nicht können. Um eine vollständigere Theorie zu bekommen (insbesondere Schnittpunkte zu erhalten), erweitern wir die Ebene um einen Punkt P_∞, der auf jeder Geraden liegen soll (aber nicht auf Kreisen), und vereinbaren, dass bei der Inversion an k der Punkt O auf P_∞ und der Punkt P_∞ auf O abgebildet wird.

Werden zwei Punkte P, Q, die nicht mit O auf einer Geraden liegen, auf P' und Q' abgebildet, so ist das entstehende Dreieck $OP'Q'$ zum Dreieck OQP ähnlich. (Aufgabe 1 – Man beachte aber die Änderung des Umlaufsinnes!) Daher gilt

$$|P'Q'| : |OP'| = |QP| : |OQ| \quad \iff \quad |P'Q'| = |PQ| \cdot \frac{|OP'|}{|OQ|} = |PQ| \cdot \frac{r^2}{|OP| \cdot |OQ|}. \qquad (1)$$

Die Länge einer invertierten Strecke lässt sich also aus der ursprünglichen Länge (bei Maßgabe der Abstände vom Inversionszentrum) berechnen.
Wenn man sich der Inversion bedient, verwendet man die Abbildungsregeln aus Aufgabe 2, um ein neues Bild zu konstruieren, weil sich die Eigenschaften, die man zuvor beweisen wollte, im neuen Bild mitunter einfacher beweisen lassen. Oft ist auch der Vergleich mit dem Ausgangsbild (in Kombination mit Aufgabe 2) sehr hilfreich.
Zum Abschluss noch ein paar Hinweise zur Verwendung von Inversion:

1. In vielen Fällen kommt es auf den gewählten Radius r nicht an, obwohl eine gute Wahl manchmal das Leben erleichtern kann. Essentiell ist die Wahl des Inversionszentrums! Hier hilft vor allem Erfahrung und vielleicht eine der folgenden Faustregeln.

2. Wenn viele Kreise durch einen Punkt verlaufen, ist dieser Punkt ein guter Kandidat für ein Inversionszentrum.

3. Wenn sich einer oder mehrere Kreise in einem Punkt berühren, gehen diese bei Inversion um diesen Punkt in parallele Geraden über, die man meist besser in Griff kriegen kann.

4. Kommen viele Winkelgrößen der Form $\sphericalangle AXY$ mit verschiedenen X, Y, aber immer gleichem A vor, kann eine Inversion um A ein besseres Bild schaffen.

Aufgaben

Aufgabe 1. Seien O, P und Q drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Seien P' und Q' die Bildpunkte von P bzw. Q bei einer Inversion mit Mittelpunkt O und beliebigem Radius. Beweise, dass P, Q, P' und Q' auf einem Kreis liegen. Zeige außerdem, dass die Dreiecke OPQ und $OQ'P'$ ähnlich sind.

Aufgabe 2. Zeige, dass bei Inversion an einem Kreis mit Mittelpunkt O

(A)	eine Gerade durch O	auf	sich selbst
(B)	eine Gerade, die nicht durch O geht,	auf	einen Kreis durch O
(C)	ein Kreis durch O	auf	eine Gerade, die nicht durch O geht,
(D)	ein Kreis, der nicht durch O geht,	auf	einen Kreis, der nicht durch O geht,

abgebildet wird.

Aufgabe 3. Sei ABC ein Dreieck mit Umkreis k. Zeige, dass die Bilder der Geraden AB, BC, CA und das Bild von k bei Inversion am Inkreis zueinander kongruent sind.

Aufgabe 4. Seien k_1, k_2, k_3 und k_4 vier Kreise, sodass k_1 und k_2, k_2 und k_3, k_3 und k_4 sowie k_4 und k_1 einander jeweils von außen berühren. Zeige, dass dann die vier Berührpunkte auf einem gemeinsamen Kreis liegen.

Die folgenden zwei bekannten Tatsachen haben viele, auch elementare Beweise. Hier sollen aber die besonders schönen und kurzen Beweise mittels Inversion gefunden werden.

Aufgabe 5. Es sei ABC ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H und Umkreismittelpunkt U. Zeige, dass $\sphericalangle HAB = \sphericalangle CAU$.

Aufgabe 6. Es sei ABC ein Dreieck mit Inkreismittelpunkt I und S der Mittelpunkt des Umkreisbogens BC, der A nicht enthält. Seien D und E verschiedene Punkte im Inneren der Strecke BC sowie F und G von S verschiedene Punkte auf dem Umkreis von ABC, sodass S auf den Geraden DF und EG liegt.

1. Zeige, dass $DEFG$ ein Sehnenviereck ist.

2. Es gelte $F \neq S \neq G$. Zeige, dass die Umkreise von IDF und IEG einander in I berühren.

Aufgabe 7. Seien k_1 und k_2 zwei Kreise mit zwei äußeren Tangenten AB und CD, wobei $A \neq C$ auf k_1 und $B \neq D$ auf k_2 die jeweiligen Berührpunkte sind. Sei M der Mittelpunkt der Strecke AB und seien P und Q die zweiten Schnittpunkte der Geraden MC bzw. MD mit den Kreisen k_1 bzw. k_2. Beweise, dass A, B, P und Q auf einem Kreis liegen.

Aufgabe 8. Gegeben sei ein Dreieck ABC mit halbem Umfang s. Die Punkte E und F liegen auf der Geraden AB und erfüllen $|CE| = |CF| = s$. Beweise, dass der Ankreis des Dreiecks ABC an die Seite AB den Umkreis des Dreiecks EFC berührt.

Aufgabe 9. Sei P ein Punkt innerhalb des Dreiecks ABC, für den

$$\sphericalangle APB - \sphericalangle ACB = \sphericalangle CPA - \sphericalangle CBA$$

gilt. Seien D und E die Inkreismittelpunkte der Dreiecke APB bzw. APC. Beweise, dass sich die Geraden AP, BD und CE in einem Punkt schneiden.

Aufgabe 10. Sei ABC ein Dreieck mit Inkreismittelpunkt I und Umkreis Γ. Ein Kreis ω berühre Γ von innen und die Seiten AB und AC in den Punkten X bzw. Y. Beweise, dass I der Mittelpunkt der Strecke XY ist.

Aufgabe 11. Seien Γ_1, Γ_2, Γ_3 und Γ_4 vier verschiedene Kreise, sodass Γ_1 und Γ_3 einander von außen in einem Punkt P berühren. Γ_2 und Γ_4 mögen einander ebenfalls von außen in P berühren. Weiters seien A, B, C und D die von P verschiedenen Schnittpunkte der Kreise Γ_1 und Γ_2, Γ_2 und Γ_3, Γ_3 und Γ_4 sowie Γ_4 und Γ_1 (in dieser Reihenfolge). Zeige, dass folgende Gleichung gilt:

$$\frac{|AB| \cdot |BC|}{|AD| \cdot |DC|} = \frac{|PB|^2}{|PD|^2}$$

Aufgabe 12. Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $AB > AC$. Es seien Γ sein Umkreis, H sein Höhenschnittpunkt und F der Höhenfußpunkt von A. Ferner sei M der Mittelpunkt von BC. Es bezeichne Q den Punkt auf Γ mit $\sphericalangle HQA = 90°$ und K den Punkt auf Γ mit $\sphericalangle HKQ = 90°$. Dabei sei angenommen, dass die Punkte A, B, C, K und Q paarweise verschieden sind und in dieser Reihenfolge auf Γ liegen. Man beweise, dass sich die Umkreise der Dreiecke KQH und FKM berühren.

Aufgabe 13. Sei h ein Halbkreis mit Durchmesser AB. Es wird ein beliebiger Punkt P im Inneren der Strecke AB gewählt. Die durch P verlaufende Normale auf AB schneide h im Punkt C. Die Strecke PC zerlegt die Halbkreisfläche in zwei Teile. In jeden davon werde jener Kreis eingeschrieben, der AB, PC und h berührt. Die Berührpunkte der beiden Kreise mit AB werden mit D und E bezeichnet, wobei D zwischen A und P liege. Man beweise, dass die Größe des Winkels $\angle DCE$ nicht von der Wahl von P abhängt.

Aufgabe 14. Satz von Feuerbach. Sei ABC ein Dreieck. Die Seitenmittelpunkte von BC, AC und AB seien mit M, N und K bezeichnet. Dann berührt der Inkreis k von ABC den Umkreis des Dreiecks MNK (den sogenannten *Feuerbachkreis*) von innen.

Beweise diesen Satz in den folgenden Schritten. Seien D der Höhenfußpunkt von A auf BC, T der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale von $\angle BAC$ mit BC und P der Berührpunkt von k mit BC.

1. Zeige, dass D auf dem Feuerbachkreis liegt.

2. Zeige $MD \cdot MT = MP^2$.
3. Zeige, dass die Inversion in M mit Inversionsradius $|MP|$ den Kreis k erhält und den Punkt D auf den Punkt T abbildet.
4. Zeige mittels der Winkelerhaltungseigenschaft, dass der Feuerbachkreis unter dieser Inversion in die zweite Tangente durch T an k übergeht.

Tipps zu den Aufgaben

Aufgabe 1. Verwende den Satz über die Potenz eines Punktes mit O.

Aufgabe 2. Definiere bei (B) den Lotfußpunkt L von O auf die Gerade und zeige, dass diese auf den Kreis mit Durchmesser OL'.
Bei (D) sei AB ein Durchmesser, sodass O auf der Geraden AB liegt. Beweise, dass der invertierte Kreis den Durchmesser $A'B'$ hat.

Aufgabe 3. Verwende nach der Inversion den Peripheriewinkelsatz.

Aufgabe 4. Invertiere an einem der Berührpunkte und führe die verbleibenden Kreise durch zentrische Streckung im Berührpunkt ineinander über. Streng genommen muss ein Lageproblem betrachtet werden: Die Aussage ist ohne die Angabe, dass die Kreise einander *von außen* berühren, nämlich falsch. Man kann das elegant lösen, indem man die Kreise orientiert: Zwei gegen den Uhrzeigersinn, die anderen beiden im Uhrzeigersinn, sodass in den Berührpunkten auch die Richtungen der Kreise übereinstimmen. Diese „gerichtete Berühreigenschaft“ bleibt ebenfalls unter Inversion erhalten und löst das Lageproblem.

Aufgabe 5. Sei D der Punkt am Umkreis, sodass AD ein Durchmesser ist, und F der Höhenfußpunkt von A. Wähle eine Inversion so, dass $AC'B'$ zu ABC kongruent ist. Was sind F' und D'?

Aufgabe 6. Invertiere am Südpolarkreis und verwende Aufgabe 1.

Aufgabe 7. Invertiere so, dass der Umkreis von $ABCD$ in den gesuchten Kreis übergeht.

Aufgabe 8. Invertiere so, dass der Ankreis auf sich selbst abgebildet wird, und beachte, dass Berührpunkte erhalten bleiben.

Aufgabe 9. Invertiere in A mit beliebigem Radius. Wie übersetzt sich die Bedingung auf das Dreieck $B'P'C'$?

Aufgabe 10. Invertiere so, dass ω in den Ankreis des Dreiecks ABC zur Seite BC übergeht. Verwende danach ähnliche Dreiecke, um die Kollinearität zu zeigen.

Aufgabe 11. Invertiere in P. Was kann man über die Seitenlängen von $A'B'C'D'$ aussagen?

Aufgabe 12. Zeige erst, dass H, M und Q kollinear sind und invertiere dann so, dass der Umkreis des Dreiecks KQH in die Gerade AQ übergeht.

Aufgabe 13. Invertiere in C so, dass P auf einen Punkt am Umkreis abgebildet wird. Spiegelung dieses Bildes an der Winkelsymmetralen von $\angle ACB$ erleichtert die Argumentation.

Aufgabe 14. Zu Teil 2: Umschreiben auf Verhältnisse, diese mit Strahlensatz auf die Winkelsymmetrale AT übertragen. Die nun zu zeigende Aussage sollte an Aufgabe 6 auf diesem Blatt erinnern!

Lösungsvorschläge zu den Aufgaben

Lösungsvorschläge von Moritz Hiebler

Extra-Theorieblock 1 (einander berührende Zykel)**.** Wenn wir mit Z die Vereinigung der Menge aller Kreise mit der Menge aller Geraden bezeichnen, und ein Element von Z einen *Zykel* nennen, haben wir in Aufgabe 2 bewiesen: Jeder Zykel wird bei Inversion wieder auf einen Zykel abgebildet. Wir zeigen noch: Berühren sich zwei Zykel z_1 und z_2 in einem Punkt T, dann berühren sich die invertierten Zykel z_1' und z_2' im Punkt T'. Einerseits gilt nämlich $T' \in z_1' \cap z_2'$. Gäbe es andererseits einen weiteren Schnittpunkt $S \neq T'$, von z_1' und z_2', so müsste der invertierte Punkt $S' \neq T$ ein weiterer Schnittpunkt von z_1 und z_2 sein, was der Voraussetzung widerspricht. Beachte, dass in dieser Formulierung auch zwei parallele Geraden als sich (im Fernpunkt) berührende Zykel gelten.

Extra-Theorieblock 2 (Fixkreise)**.** Nun wollen wir noch untersuchen, welche Kreise $\omega \neq k$ bei Inversion an k auf sich selbst abgebildet werden; diese heißen *Fixkreise* der Inversion. Dazu kann ω zunächst nicht ganz innerhalb oder ganz außerhalb von k liegen, da die Inversion diese Lagen umkehrt. Folglich hat ω zwei Schnittpunkte S und T mit ω gemeinsam. Sei X ein von S und T verschiedener Punkt auf ω, sodass OX keine Tangente an ω ist, und bezeichne Y den zweiten Schnittpunkt der Geraden OX mit ω. Damit ω auf sich selbst abgebildet wird, muss X' ein Punkt auf der Geraden OX sein, der wieder auf ω liegt. Wegen $X \neq S, T$ kann $X' = X$ nicht gelten und es verbleibt nur $X' = Y$ als einzige übrige Möglichkeit. Es folgt $OX \cdot OY = r^2 = OS^2$, was OS als Tangente an den Umkreis ω von XYS nachweist. Die Tangente an k durch S verläuft also durch den Mittelpunkt von ω, d. h. die Tangenten an k und ω in S schneiden einander im rechten Winkel, oder noch einmal anders ausgedrückt: Die Kreise k und ω sind orthogonal. Umgekehrt ergibt sich aus obiger Gleichung direkt, dass zu k orthogonale Kreise Fixkreise sind.
Zusammenfassend lässt sich also sagen: Von k verschiedene Kreise sind genau dann Fixkreise der Inversion an k, wenn sie k rechtwinklig schneiden.

Bemerkung. Es sei hier ohne Beweis erwähnt, dass die Inversion eine *konforme* Abbildung der Möbius-Ebene ist, das heißt, die (ungerichteten) Schnittwinkel zweier (differenzierbarer) Kurven bleiben unter Inversion erhalten. Hiermit lässt beispielsweise im vorigen Absatz abkürzen: Ein zu k orthogonaler Kreis wird nämlich wieder auf einen zu k orthogonalen Kreis durch dieselben Schnittpunkte abgebildet, das kann nur dieser Kreis selbst sein. Ein (kurz gehaltener) Beweis für die Winkeltreue von Zykeln findet sich im bereits oben verlinkten ÖMO-Skriptum.

Aufgabe 1. Nach Voraussetzung ist O der (eindeutige) Schnittpunkt der Geraden PP' und QQ'. Laut Definition von Inversion gilt außerdem $OP \cdot OP' = r^2 = OQ \cdot OQ'$ und der Satz über die Potenz eines Punktes liefert wie gewünscht, dass P, P', Q und Q' auf einem Kreis liegen.
Neben $\sphericalangle POQ = \sphericalangle P'OQ'$ folgt aus dem Peripheriewinkelsatz auch $\sphericalangle OPQ = \sphericalangle P'PQ = \sphericalangle P'Q'Q = \sphericalangle P'Q'O = -\sphericalangle OQ'P'$ (mit gerichteten Winkeln modulo 180°), sodass die beiden Dreiecke OPQ und $OQ'P'$ gegensinnig ähnlich sind.

Aufgabe 2. Es bezeichne Φ die gegebene Inversion. Aus der Einführung folgt $\Phi(\Phi(P)) = P$ für alle Punkte P der Möbius-Ebene (die euklidische Ebene erweitert um P_∞).
Zu (A): Bezeichne g eine Gerade durch den Mittelpunkt. Es genügt $\Phi(g) \subseteq g$ zu beweisen, denn dann folgt durch nochmalige Anwendung $g = \Phi(\Phi(g)) \subseteq \Phi(g)$ und daher die gewünschte Gleichheit. Ein Punkt $P \in g \setminus \{O, P_\infty\}$ wird aber nach Definition wieder nach g abgebildet, der Punkt O auf $P_\infty \in g$ und umgekehrt.
Zu (B): Sei h eine Gerade, die nicht durch O verläuft und L der Lotfußpunkt von O auf h. Wir zeigen, dass $\Phi(h)$ der Kreis mit Durchmesser OL' ist. Zunächst gilt $\Phi(P_\infty) = O$ sowie $\Phi(L) = L'$, also liegen O und L tatsächlich in der behaupteten Bildmenge. Jeder andere Punkt $P \in h \setminus \{P_\infty\}$ wird auf

einen Punkt P' abgebildet, für den nach Aufgabe 1 die Dreiecke OLP und $OP'L'$ (gegensinnig) ähnlich sind, insbesondere gilt $\sphericalangle OP'L' = \sphericalangle PLO = 90°$. Laut dem Satz von Thales liegt P' damit auf dem Kreis mit Durchmesser OL'. Dass auch jeder Punkt Q auf dem Kreis Bild eines Punktes auf h ist, folgt durch Umkehrung dieser Konstruktion: Bei $Q = O$ wird P_∞ auf Q abgebildet, sonst der Schnittpunkt von OQ mit h (wegen der zuvor geführten Argumentation).
Zu (C): Ist OL der Durchmesser eines Kreises k durch O, so folgt laut (B) für die Normale ℓ auf OL durch L' die Gleichung $\Phi(\ell) = k$ und daraus $\ell = \Phi(\Phi(\ell)) = \Phi(k)$ durch nochmalige Anwendung von Φ.
Zu (D): Sei AB ein Durchmesser des Kreises ω, sodass O, A und B kollinear liegen, und Ω der Kreis mit Durchmesser $A'B'$. (Beachte, dass nach Voraussetzung weder A' noch B' der Fernpunkt ist.) Sei $P \in \omega \setminus \{A, B\}$ und Q der zweite Schnittpunkt der Geraden OP mit ω (bzw. $Q = P$, wenn OP eine Tangente ist). Laut Peripheriewinkelsatz (bzw. Sehnen-Tangentenwinkelsatz für $Q = P$) in ω und Aufgabe 1 gilt (mit gerichteten Winkeln modulo 180°)

$$\sphericalangle ABQ = \sphericalangle APQ = \sphericalangle APO = -\sphericalangle P'A'O = \sphericalangle OA'P' = \sphericalangle B'A'P'$$

und durch Vertauschen der Rollen von A und B ebenso $\sphericalangle BAQ = \sphericalangle A'B'P'$. Folglich ist das Dreieck $B'A'P'$ zum rechtwinkligen Dreieck ABQ ähnlich und P' liegt auf Ω. Dies beweist $\Phi(\omega) \subseteq \Omega$. Vertauschen wir nun die Rollen von ω und Ω (das ist legitim, da die Strecke $A'B'$ wieder in die Strecke AB übergeht), so erhalten wir $\Phi(\Omega) \subseteq \omega$ und durch Anwendung von Φ schließlich $\Omega \subseteq \Phi(\omega)$, also die gewünschte Gleichheit $\Omega = \Phi(\omega)$.

Aufgabe 3. Seien D, E und F die Berührpunkte des Inkreises auf den Seiten BC, CA bzw. AB. Da sie die Lotfußpunkte des Inversionszentrums I auf die Seiten sind und gleichzeitig Fixpunkte der Inversion, gehen BC, CA und AB nach Aufgabe 2 in die Kreise a, b und c mit den Durchmessern ID, IE bzw. IF über. Die Länge der Durchmesser ist jeweils gleich dem Inkreisradius; somit sind diese drei Kreise kongruent. Da sich je zwei der Seiten in den Eckpunkten schneiden, schneiden sich die Kreise neben O jeweils in $P := A'$, $Q := B'$ und $R := C'$. Nun liegt I nicht auf k und wird somit auf einen Kreis k' abgebildet, der durch P, Q und R geht.
Wir zeigen schließlich, dass die Spiegelung J von I an der Geraden QR auf k' liegt, denn dann geht a, der Umkreis von IQR, unter dieser Spiegelung in den von JQR, also in k', über und ist somit auch kongruent zu a.
Dazu verwenden wir, dass a bei Spiegelung an IQ auf b abgebildet wird und damit für die zugehörigen Peripheriewinkel über der gemeinsamen Sehne QI die Gleichung $\sphericalangle QRI = -\sphericalangle QPI$ gilt (gerichtet modulo 180°). Analog sieht man $\sphericalangle IQR = -\sphericalangle IPR$ ein. Mithilfe der Winkelsumme im Dreieck QRI ergibt sich insgesamt

$$\sphericalangle RJQ = -\sphericalangle RIQ = \sphericalangle QRI + \sphericalangle IQR = -\sphericalangle QPI - \sphericalangle IPR = -\sphericalangle QPR = \sphericalangle RPQ,$$

und nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes liegt auch J auf k'.

Aufgabe 4. Seien A_i der Berührpunkt von k_i und k_{i+1} für $i = 1, 2, 3, 4$ (mit $k_5 = k_1$). Wir orientieren die Kreise k_1 und k_3 im Uhrzeigersinn und k_2 und k_4 gegen den Uhrzeigersinn. In den vier Berührpunkten haben dann die Kreise (weil sie einander jeweils von außen berühren) die gleiche Orientierung.
Nun invertieren wir in A_1 mit beliebigem Radius. Genau dann liegen A_1, A_2, A_3 und A_4 auf einem Kreis, wenn A'_2, A'_3 und A'_4 kollinear sind. Konstruieren wir also das Bild nach der Inversion: Die Bildzykel von k_1 und k_2 sind nach Aufgabe 2 zwei parallele Geraden g_1 bzw. g_2, die nicht durch O verlaufen. Da die Orientierungen bei Inversion erhalten bleiben, sind g_1 und g_2 gleich orientiert. Die Bilder von k_3 und k_4 sind zwei Kreise ω_1 bzw. ω_2, die einander in A'_3 von außen berühren. Außerdem berührt ω_1 die Gerade g_2 in A'_2, und A'_4 ist der Berührpunkt von g_1 und ω_2.

Aufgrund der Orientierung ist die Lage von ω_1 und g_1 bezüglich g_2 (also in derselben Halbebene oder in unterschiedlichen Halbebenen) die gleiche wie von ω_2 und g_2 bezüglich g_1. Wären sie jeweils in verschiedenen Halbebenen, so wären ω_1 und ω_2 durch die beiden Geraden getrennt und könnten sich nicht berühren. Daher liegen sie jeweils in derselben Halbebene und der Berührpunkt A_3' von ω_1 und ω_2 liegt zwischen g_1 und g_2.
Betrachten wir nun die zentrische Streckung durch A_3', die g_1 in g_2 überführt. Sie bildet die Halbebene $\mathcal{H}$ bzgl. g_1, in der A_3' liegt, auf die Halbebene $\mathcal{H}'$ bzgl. g_2 ab, in der A_3' liegt. Der durch A_3' verlaufende Kreis ω_2 mit Tangente g_1 liegt in $\mathcal{H}$ und wird daher auf einen Kreis ω in $\mathcal{H}'$ mit Tangente g_2 abgebildet, der ω_2 in A_3' berührt. Nachdem A_3' zwischen g_1 und g_2 liegt, hat diese zentrische Streckung einen negativen Streckungsfaktor. Damit berührt ω den Kreis ω_2 von außen. Diese Bedingungen charakterisieren jedoch den Kreis ω_1 eindeutig. Wir folgern $\omega = \omega_1$ und dass die Berührpunkte A_2', A_4' mit dem Streckungszentrum A_3' auf einer Geraden liegen, und das war noch zu zeigen.

Aufgabe 5. Sei u der Umkreis von ABC, D der Punkt auf u, sodass AD ein Durchmesser ist, und F der Höhenfußpunkt von A. Wir invertieren im Punkt A mit beliebigem Radius $r > 0$. Nach Aufgabe 2 wird u auf die Gerade $B'C'$ abgebildet, und der Punkt D geht in den Lotfußpunkt von A auf $B'C'$ über. Damit ist D' der Höhenfußpunkt von A im zu ABC laut Aufgabe 1 (gegensinnig) ähnlichen Dreieck $AC'B'$. Die eingeschlossenen Winkel $\sphericalangle HAB = \sphericalangle FAB'$ und $-\sphericalangle D'AC' = \sphericalangle C'AD' = \sphericalangle CAU$ sind daher gleich groß (das Minus von der gegensinnigen Orientierung).

Bemerkung. Wählt man speziell $r := \sqrt{|AB| \cdot |AC|}$, so sind ABC und $AC'B'$ wegen $|AB'| = r^2/|AB| = |AC|$ sogar kongruent. Verkettet man diese Inversion nun mit der Spiegelung an der Winkelsymmetralen, so erhält man eine Abbildung, die B (über B') auf C und C (über C') auf B sowie A auf P_∞ (und umgekehrt) wirft. Hier handelt es sich tatsächlich um die projektive Involution $A \leftrightarrow P_\infty$, $B \leftrightarrow C$ (in Theresias Notation).
Wendet man diese in Aufgabe 5 an, so geht D in F über (s. dort), woraus direkt die gesuchte isogonale Konjugation von H und U folgt.

Aufgabe 6. Wir invertieren am „Südpolarkreis“, also dem Kreis mit Mittelpunkt S und Radius $|SB| = |SC|$. Hierbei gehen die Geraden DF und EG nach Aufgabe 2 in sich selbst über und die Gerade BC in einen Kreis u, der durch $B' = B$, $C' = C$ und S geht; damit ist u auch der Umkreis des Dreiecks ABC. Umgekehrt geht u in die Gerade BC über. Daher ist D' der von S verschiedene Schnittpunkt von DF mit u, also $D' = F$. Analog ist auch $E' = G$. Laut Aufgabe 1 liegen somit D, F, E und G auf einem Kreis.
Bekanntermaßen liegt auch I auf dem Südpolarkreis. Nach Definition gilt also $SD \cdot SF = |SB|^2 = SI^2$ und nach der Umkehrung des Sekanten-Tangentensatzes berührt die Gerade SI den Umkreis des Dreiecks IDF. Aus demselben Grund ist SI auch eine Tangente an den Umkreis des Dreiecks IEG. Diese beiden Umkreise haben daher eine gemeinsame Tangente, berühren einander also (in I).

Bemerkung. Dass I auf dem Südpolarkreis liegt, kann man übrigens auch sehr elegant bei Vorkenntnissen über den Feuerbachkreis einsehen. Wir verwenden, dass die Mittelpunkte der Seiten, die Höhenfußpunkte und die Mittelpunkte der Höhenabschnitte (d. h. von HA, HB und HC) auf einem Kreis, dem Feuerbachkreis liegen. Ist ABC ein beliebiges Dreieck mit Inkreismittelpunkt I, so bilden die Ankreismittelpunkte I_A, I_B, I_C ein Dreieck, in dem A, B und C die Höhenfußpunkte (Check!) und I der Höhenschnittpunkt ist. Der Umkreis von ABC ist somit der Feuerbachkreis des Dreiecks $I_AI_BI_C$. Auf ihm liegt der Mittelpunkt S des Höhenabschnitts II_A, der auch der Mittelpunkt des Kreises um IBI_AC ist. (Check! Beachte auch, dass die Höhen von $I_AI_BI_C$ die Winkelsymmetralen des Dreiecks ABC sind.) Das ist genau der Südpolarkreis! Zudem folgt auch, dass der „Nordpol“ zu A, also der zweite Schnittpunkt der Außenwinkelsymmetrale mit dem Umkreis, der Mittelpunkt der Seite I_BI_C ist. (Check!)

Aufgabe 7. Laut dem Tangenten-Sekantensatz gilt $MP \cdot MC = MA^2 = MB^2 = MQ \cdot MD$, woraus aus der Umkehrung des Sekantensatzes folgt, dass P, C, Q und D auf einem Kreis liegen. Invertieren wir am Kreis mit Mittelpunkt M und Radius $|MA|$, so erhalten wir aus obiger Gleichung auch, dass $Q' = D$ und $P' = C$ gelten. Um nun $ABPQ$ als Sehnenviereck nachzuweisen, genügt es nach Aufgabe 2, dasselbe für das Viereck $A'B'P'Q' = ABCD$ zu zeigen. Da aber bei Spiegelung an der Verbindungsgeraden der Mittelpunkte von k_1 und k_2 die Punkte A und B in C und D übergehen, ist $ACDB$ ein gleichschenkliges Trapez und besitzt daher einen Umkreis.

Aufgabe 8. Der Ankreis k_C an die Seite AB berühre die Seiten AC und BC in den Punkten S bzw. T. Wir invertieren am Kreis mit Mittelpunkt C und Radius s. Es gilt $|CS| = |CT| = s$, denn

$$2|CS| = |CS| + |CT| = (|CA| + |AS|) + (|BT| + |CB|) = |CA| + |AB| + |CB|,$$

da Tangentenabschnitte an einen Kreis gleich lang sind. Also werden S und T auf sich selbst abgebildet, k_C schneidet den Inversionskreis orthogonal und ist folglich ein Fixkreis dieser Inversion. Das Bild der Geraden $AB = DE$ ist genau der Kreis, der durch $E' = E$, $F' = F$ und das Inversionszentrum C geht, also der Umkreis von EFC. Da berührende Zykel bei Inversion in ebensolche überführt werden, berühren sich mit k_C und AB auch k_C und der Umkreis des Dreiecks EFC.

Aufgabe 9. Die Geraden BD und CE sind genau die Winkelsymmetralen der Winkel $\angle PBA$ und $\angle ACP$. Seien X und Y ihre Schnittpunkte mit AP. Da Winkelsymmetralen die gegenüberliegenden Seiten im Verhältnis der anliegenden teilen, folgt

$$\frac{PX}{XA} = \frac{|PB|}{|BA|} \qquad \text{sowie} \qquad \frac{PY}{YA} = \frac{|PC|}{|CA|}.$$

Nachdem Teilverhältnisse einen Punkt eindeutig bestimmen, bleibt $|PB|/|BA| = |PC|/|CA|$ zu zeigen. Um die zweite Bedingung in Griff zu bekommen (viele Winkel mit einem Endpunkt A), invertieren wir im Punkt A mit beliebigem Radius $r > 0$. Nach Aufgabe 1 und der Voraussetzung gilt

$$\sphericalangle P'B'C' = -\sphericalangle AB'P' + \sphericalangle AB'C' = -\sphericalangle P'C'A + \sphericalangle B'C'A = \sphericalangle B'C'P',$$

das Dreieck $B'P'C'$ ist also gleichschenklig. Auf das ursprüngliche Dreieck übersetzt sich $|B'P'| = |C'P'|$ bei Inversion laut (1) aber zu

$$|BP| \cdot \frac{r^2}{|AP| \cdot |AB|} = |CP| \cdot \frac{r^2}{|AP| \cdot |AC|} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{|PB|}{|BA|} = \frac{|PC|}{|CA|},$$

was zu zeigen war.

Aufgabe 10. Sei M der Mittelpunkt von ω. Wir beweisen nur die Kollinearität von X, I und Y, da AI als Winkelsymmetrale des gleichschenkligen Dreiecks AXY mit der Streckensymmetrale von XY zusammenfällt. Liegt also der Punkt I auf der Geraden XY, so halbiert er bereits die Strecke XY. Zu diesem Zweck invertieren wir am Kreis mit Mittelpunkt A und Radius $|AX|$. Dann bleibt zu beweisen, dass A, X, Y und I' ein Sehnenviereck bilden. Nach dem Satz von Thales schneidet die Winkelsymmetrale AI den Umkreis von AXY ein zweites Mal im Punkt M. Wir wollen daher $I' = M$ nachweisen.
Nun ist ω ein Fixkreis und der Umkreis des Dreiecks ABC wird auf die Gerade $B'C'$ abgebildet, die ω berührt. Da B' und C' zwischen A und X bzw. A und Y liegen, ist ω der Ankreis des Dreiecks $AB'C'$ und es genügt für den Beweis von $I' = M$ die Geraden $B'I'$ und $C'I'$ als zugehörige Außenwinkelsymmetralen nachzuweisen. Wir führen dies nur für $B'I'$ durch, bei $C'I'$ folgt das aus

analogen Rechnungen. Laut Aufgabe 1 gilt mit $\gamma := \sphericalangle ACB = \sphericalangle C'B'A$ und gerichteten Winkeln modulo 180° nämlich

$$\sphericalangle I'B'C' = \sphericalangle I'B'A - \sphericalangle C'B'A = -\sphericalangle BIA - \gamma = \left(90^\circ + \frac{\gamma}{2}\right) - \gamma = 90^\circ - \frac{\gamma}{2},$$

wobei wir $\sphericalangle AIB = 90^\circ + \gamma/2$ verwendet haben, was direkt aus der Winkelsumme im Dreieck AIB folgt. Schließlich erhalten wir

$$\sphericalangle AB'I' = \sphericalangle AB'C' + \sphericalangle C'B'I' = -\gamma - \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} = \sphericalangle I'B'C',$$

dass also $B'I'$ die Außenwinkelsymmetrale des Winkels $\angle C'B'A$ ist.

Bemerkung. Über die projektive Involution $A \leftrightarrow P_\infty$, $B \leftrightarrow C$ ergibt sich eine (in den Hinweisen beabsichtigte) Beweisvariante, bei der zu zeigen bleibt, dass I in den Ankreismittelpunkt I_A gegenüber der Seite A übergeführt wird. Es bleibt also $AI \cdot AI_A = |AB| \cdot |AC|$ nachzuweisen. Man erhält diese Gleichung aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABI und AI_AC. Eine detaillierte Ausführung empfiehlt sich als lohnende Übung! :)

Aufgabe 11. Bei Inversion in P mit beliebigem Radius $r > 0$ gehen die vier Kreise in zwei Paare paralleler Geraden über. Da es vier von P verschiedene Schnittpunkte gibt, schneiden sich auch die entstehenden Geraden in den vom Fernpunkt verschiedenen Punkten A', B', C' und D'. Diese bilden folglich ein Parallelogramm und wir erhalten nach (1)

$$|A'B'| = |C'D'| \quad \Longleftrightarrow \quad |AB| \cdot \frac{r^2}{|PA| \cdot |PB|} = |CD| \cdot \frac{r^2}{|PC| \cdot |PD|} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|PA| \cdot |PB|}{|PC| \cdot |PD|}$$

sowie

$$|B'C'| = |A'D'| \quad \Longleftrightarrow \quad |BC| \cdot \frac{r^2}{|PB| \cdot |PC|} = |AD| \cdot \frac{r^2}{|PA| \cdot |PD|} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{|BC|}{|AD|} = \frac{|PB| \cdot |PC|}{|PA| \cdot |PD|},$$

was durch Multiplikation die gewünschte Gleichung liefert.

Aufgabe 12. Seien N der Mittelpunkt der Strecke HQ, der nach dem Satz von Thales zugleich der Umkreismittelpunkt des Dreiecks KQH ist, P der Mittelpunkt der Strecke HA und R der Bildpunkt von H bei Spiegelung an der Geraden BC.
Zuerst zeigen wir, dass M auf der Geraden HQ liegt. Wir bemerken dazu, dass bei der zentrischen Streckung mit Zentrum H und Streckungsfaktor 2 der Umkreis f des Dreiecks MFP (der Feuerbachkreis) in einen Kreis durch A, R und den Spiegelpunkt von H bzgl. M übergeht. Nachdem die letzten beiden Punkte bekanntermaßen am Umkreis liegen, wird also f auf Γ abgebildet. Die inverse Homothetie mit Zentrum H und Streckungsfaktor $1/2$ bildet Γ auf f ab, was $N \in f$ zur Folge hat. Bezeichnen wir mit M_0 den Schnittpunkt der Geraden HN und BC, so ist die Strecke PM_0 wegen $\sphericalangle PNM_0 = \sphericalangle PNH = \sphericalangle AQH = 90^\circ = \sphericalangle PFM_0$ ein Durchmesser des Umkreises f von PFN. Aus $\sphericalangle MFP = 90^\circ$ und $M \in f$ folgt aber, dass auch die Strecke PM ein Durchmesser von f ist, was $M = M_0$ und die Kollinearität von M, H und Q impliziert.
Nun invertieren wir am Kreis mit Mittelpunkt H und Radius $r := |HQ|$. Dies hat nach Aufgabe 2 zur Folge, dass der Umkreis des Dreiecks KQH in die Gerade normal zu $Q' = Q$, also in AQ, übergeht, außerdem A in den zweiten Schnittpunkt der Geraden HA mit dem Umkreis von KQH und K in den Schnittpunkt K' von AQ mit HK. Weiter liegen A', R', K' und Q' (zusammen mit B' und C') auf dem Bild Γ' von Γ. Schließlich geht die Gerade $BC = MF$ in den Kreis mit Durchmesser HF' über, der wegen $HR = 2HF \iff r^2/HR' = 2r^2/HF' \iff HF' = 2HR'$ den Mittelpunkt R' besitzt.

Zu zeigen bleibt, dass der Umkreis des Dreiecks $F'K'M'$ die Gerade AQ im Punkt K' berührt. Es genügt dafür $K'R'$ als Streckensymmetrale von $M'F'$ zu identifizieren. Seien dazu S der Lotfußpunkt von R auf der Geraden MQ und T der Schnittpunkt der Geraden $K'R'$ und $M'F'$. Wegen $\sphericalangle R'A'Q = 90° = \sphericalangle R'SQ$ ist $R'Q$ ein Durchmesser von Γ' und es folgt $\sphericalangle R'KQ = 90° = \sphericalangle SQK$. Daher ist $SR'K'Q$ und weiters $M'TR'S$ ein Rechteck. Wir erhalten $QK' = M'T = SR' = M'F'/2$ (mit der letzten Gleichheit aus dem Strahlensatz); $K'R'$ verläuft also durch den Mittelpunkt T der Strecke $M'F'$, steht auf diese normal und ist daher wie gewünscht deren Streckensymmetrale.

Aufgabe 13. Sei k der Kreis mit Durchmesser AB. Wir beweisen, dass die Größe dieses Winkels immer 45° beträgt, indem wir CD als Winkelsymmetrale von $\angle ACP$ und auf analoge Weise CE als Winkelsymmetrale von $\angle PCB$ nachweisen. Dazu invertieren wir am Kreis mit Mittelpunkt D und Radius $|DP|$. Gemäß Aufgabe 2 bildet die Gerade AB auf sich selbst ab, der in D berührende Kreis geht in eine Parallele g über, die Gerade CP hat als Bild einen Kreis ω mit Durchmesser DP, der g berührt, und k bildet ebenfalls auf einen Kreis k' mit Mittelpunkt auf der Geraden AB ab, der g berührt. Die Punkte A', D, B' und $P' = P$ liegen in dieser Reihenfolge auf AB, wobei nach dem Beweis von Aufgabe 2 die Strecke $A'B'$ ein Durchmesser von k' und DP einer von ω ist. Wir wollen

$$\sphericalangle PA'C' = -\sphericalangle C'A'D = \sphericalangle ACD \overset{!}{=} \sphericalangle DCP = -\sphericalangle DPC' = \sphericalangle C'PA$$

beweisen, dass also das Dreieck $A'PC'$ gleichschenklig ist. Spiegeln wir aber an der Normalen auf g durch C' (einen der beiden Schnittpunkte von k' und ω), so geht k' in einen anderen Kreis durch C' über, dessen Mittelpunkt auf der Geraden AB liegt, und der g berührt. Da dafür nur ω in Frage kommt, geht A' bei dieser Spiegelung in P über, d. h. $A'PC'$ ist gleichschenklig.

Bemerkung. Wieder liefert die projektive Involution $C \leftrightarrow P_\infty$, $A \leftrightarrow B$ eine Beweisvariante, die in den Hinweisen beabsichtigt war. In diesem Fall geht P in den Punkt Q von k über, für den CQ ein Durchmesser von k ist. Die beiden Kreise werden auf Kreise abgebildet, die die Geraden CQ und AB sowie k von außen berühren. Bezeichnet M den Mittelpunkt von k, so schließen $D'M$ und $E'M$ einen rechten Winkel ein, woraus $\sphericalangle DCE = \sphericalangle E'CD' = 45°$ folgt. Detailliertere Ausführungen werden wieder zur Übung empfohlen. :)

Aufgabe 14. Zu 14.1: Nach dem Satz von Thales liegt D auf dem Kreis mit Durchmesser AB und Mittelpunkt K, woraus $|KB| = |KD|$, also die Gleichschenkligkeit des Dreiecks BDK folgt. Laut Strahlensatz ist überdies $BMNK$ ein Parallelogramm, es ergibt sich $\sphericalangle KDM = \sphericalangle KDB = \sphericalangle DBK = \sphericalangle MBK = \sphericalangle KNM$ und M, D, N und K liegen auf einem Kreis.

Zu 14.2: Wir legen durch die zur Sprache stehenden Punkte M, T, P und D je eine Normale auf die Gerade BC und schneiden sie mit der Winkelsymmetralen AT. Wir erhalten der Reihe nach die Punkte S, T, I und A, wobei S als Schnittpunkt von Innenwinkelsymmetrale mit zugehöriger Streckensymmetralen genau der „Südpol“, also der Mittelpunkt des Kreisbogens BC am Umkreis von ABC ist, der A nicht enthält. Durch Anwendung des Strahlensatzes in T werden die Proportionen auf die Winkelsymmetrale übertragen. Genauer: Es ergibt sich

$$\frac{ST}{MT} = \frac{TI}{TP} = \frac{TA}{TD} =: \lambda \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{SI}{MP} = \frac{ST+TI}{MT+TP} = \lambda = \frac{ST+TA}{MT+TD} = \frac{SA}{MD}$$

aus dem Strahlensatz und dem Korrespondenzgesetz für Proportionen[1]. Multiplizieren wir die zu zeigende Gleichung in 14.2 mit λ^2, müssen wir äquivalent also $ST \cdot SA = SI^2$ beweisen. Diese Gleichung folgt aber direkt mit der Lösung aus Aufgabe 6, da bei der Inversion am Südpolarkreis (mit Radius $|SI|$) die Punkte T und A ineinander übergehen.

Zu 14.3: Wegen $MD \cdot MT = MP^2$ geht bei dieser Inversion D in T über. Der Inkreis k schneidet den Inversionskreis im rechten Winkel und ist somit ein Fixkreis.

[1] Dieses besagt, dass aus $\lambda = a/b = c/d$ auch $\lambda = (a+c)/(b+d)$ folgt (wobei alle Variablen für komplexe Zahlen stehen, für welche die Nenner der Brüche ungleich Null sind).

Zu 14.4: Laut Aufgabe 2 geht der Feuerbachkreis bei dieser Inversion in eine Gerade g durch $D' = T$, N' und K' über, die wir noch als Tangente an k erkennen müssen. Wir zeigen, dass g durch Spiegelung der Geraden BC an der Winkelsymmetralen AT hervorgeht, die k ebenfalls berührt, weil bei dieser Spiegelung k auf sich selbst abgebildet wird. Sei dazu $\bar{B}$ der Schnittpunkt von g mit der Geraden AC. Nach Aufgabe 1 folgt mit der Parallelität der Geraden $MK = MK'$ und AC und dem bereits im Beweis von 14.1 erwähnten Parallelogramm $BMNK$ die Gleichung

$$\sphericalangle TBA = \sphericalangle MBN = \sphericalangle KNM = -\sphericalangle N'K'M = -\sphericalangle TK'M = -\sphericalangle T\bar{B}A.$$

Somit ist $\bar{B}$ der Bildpunkt von B bei Spiegelung an der Winkelsymmetralen AT und die Gerade BT geht dabei in die Gerade $\bar{B}T = g$ über, welche folglich ebenfalls den Inkreis berührt.

Bemerkung. Zeichnet man in dieses Bild auch noch den Ankreis zur Seite BC ein, so kann man ohne viel Zusatzaufwand mitbeweisen, dass der Feuerbachkreis auch den Ankreis berührt. Da der Ankreisberührpunkt auf der Seite BC bezüglich M symmetrisch zu P liegt, ist auch der Ankreis ein Fixkreis dieser Inversion. Die Bildgerade g des Feuerbachkreises berührt aber auch den Ankreis.

Gimmick: Die Ungleichung von Ptolemäus

Wir beweisen mithilfe von Inversion, dass für vier verschiedene Punkte A, B, C und D die Ungleichung von Ptolemäus

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| \geq |AC| \cdot |BD| \tag{2}$$

gilt. Gleichheit tritt genau dann ein, wenn A, B, C und D in dieser Reihenfolge auf einem Kreis oder in einer der folgenden Anordnungen auf einer Geraden liegen:

(i) A, B, C, D (ii) B, C, D, A (iii) C, D, A, B (iv) D, A, B, C

Wir schicken voraus, dass sich (1) auch auf verschiedene *kollineare* Punkte O, P und Q erweitern lässt. In diesem Fall folgt nämlich mit gerichteten Strecken

$$Q'P' = OP' - OQ' = \frac{r^2}{OP} - \frac{r^2}{OQ} = \frac{r^2(OQ - OP)}{OP \cdot OQ} = PQ \cdot \frac{r^2}{OP \cdot OQ}$$

und durch Übergang zu deren Längen ebenfalls (1).
Nun invertieren wir am Kreis mit Mittelpunkt D und Radius r (beliebig). Nach Division durch $|DA| \cdot |DB| \cdot |DC|$ und Multiplikation mit r^2 erweist sich (2) mittels (1) als äquivalent zu

$$|AB| \cdot \frac{r^2}{|DA| \cdot |DB|} + |BC| \cdot \frac{r^2}{|DB| \cdot |DC|} \geq |AC| \cdot \frac{r^2}{|DA| \cdot |DC|} \quad \Longleftrightarrow \quad |A'B'| + |B'C'| \geq |A'C'|,$$

der Dreiecksungleichung für das Dreieck $A'B'C'$. Gleichheit gilt genau dann, wenn A', B' und C' in dieser Reihenfolge auf einer Geraden liegen.

1. Verläuft diese Gerade nicht durch D, so tritt der Gleichheitsfall nach Aufgabe 2 genau dann ein, wenn A, B, C und D auf einem Kreis liegen und die Punkte A' und C' in verschiedenen Halbebenen bezüglich der Geraden $DB' = DB$ liegen. Nachdem die *Strahlen* OX und OX' (für beliebige Punkte $X \neq O$) stets übereinstimmen[2], liegen A und A' bzw. C und C' jeweils in derselben Halbebene bzgl. DB, und der gesamte Gleichheitsfall lässt sich bei passendem Umlaufsinn des Kreises zu „A, B, C und D liegen in dieser Reihenfolge auf einem Kreis" zusammenfassen.

[2] denn nach Definition ist $\operatorname{sgn}(OX) = \operatorname{sgn}(OX')$ wegen $\operatorname{sgn}(r^2) = +1$

2. Verläuft diese Gerade durch D, so tritt der Gleichheitsfall genau dann ein, wenn sich auch A, B und C (in der richtigen Reihenfolge) auf dieser Geraden befinden. Die Analyse der Fälle, welche Lage D bezüglich der drei Punkte A', B' und C' hat, liefert bei passender Orientierung der Geraden genau die obigen vier Anordnungen.

Bemerkung. Wenn wir uns auch Geraden als verallgemeinerte Kreise vorstellen, in dem Sinne, dass sie in eine Richtung „bis" zum Fernpunkt und dann vom Fernpunkt aus wieder auf der „anderen Seite" anfangen, so können wir alle Gleichheitsfälle zu „A, B, C und D liegen in dieser Reihenfolge auf einem Zykel" zusammenfassen.
Dieser Vorstellung zuträglich ist die Tatsache, dass Zykel der Möbius-Ebene und Kreise einer (dreidimensionalen) Kugel isomorphe Strukturen darstellen. Setzt man nämlich auf die Möbius Ebene eine Kugel und projiziert vom Punkt N, der dem Berührpunkt mit der Möbius-Ebene gegenüberliegt, aus (stereographisch) auf die Kugel, so bildet der Fernpunkt P_∞ auf N ab und Zykel werden in Kreise überführt. Geraden entsprechen dabei genau den durch N verlaufenden Kreisen und umgekehrt gehen Kreise der Möbius-Ebene in Kreise nicht durch N auf der Kugel über. Für mehr Informationen siehe den Wikipedia-Eintrag.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1. nach [4], Aufgabe K.33, Lösungsvorschlag von Moritz Hiebler

Aufgabe 2. aus [4], Aufgabe K.31, Lösungsvorschlag von Moritz Hiebler

Aufgabe 3. nach [4], Aufgabe K.44, Lösungsvorschlag von Moritz Hiebler

Aufgabe 4. aus [4], Aufgabe K.43, Lösungsvorschlag von Moritz Hiebler

Aufgabe 5. aus [5], Abschnitt 10, Lösungsvorschlag von Moritz Hiebler

Aufgabe 6. allgemein bekannt, Lösungsvorschlag von Moritz Hiebler

Aufgabe 7. aus [4], Aufgabe K.56, Lösungsvorschlag von Moritz Hiebler

Aufgabe 8. aus [4], Aufgabe K.54, Lösungsvorschlag von Moritz Hiebler

Aufgabe 9. aus [1], zweites Beispiel, Lösungsvorschlag von Moritz Hiebler

Aufgabe 10. aus [5], Abschnitt 5, Lösungsvorschlag von Moritz Hiebler

Aufgabe 11. aus [1], erstes Beispiel, Lösungsvorschlag von Moritz Hiebler

Aufgabe 12. aus [2], Aufgabe G.6, Lösungsvorschlag von Moritz Hiebler

Aufgabe 13. aus [3], Aufgabe 5, Lösungsvorschlag von Moritz Hiebler

Aufgabe 14. aus [4], Aufgabe D.97, Lösungsvorschlag von Moritz Hiebler

Literatur

[1] IMO-math homepage. `https://www.imomath.com/index.php?options=323&lmm=0`. (aufgerufen am 16.03.2021).

[2] IMO Shortlist 2015. `http://imo-official.org/problems/IMO2015SL.pdf`. (aufgerufen am 16.03.2021).

[3] ÖMO BWF 2020. `https://oemo.at/OeMO/aufgaben/BWF/2020`. (aufgerufen am 16.03.2021).

[4] E. Specht and R. Strich. *geometria – scientiae atlantis*, volume 1. Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, 2nd edition, 2009.

[5] Yufei Zhao. Lemmas in Euclidean Geometry. `http://web.mit.edu/yufeiz/www/olympiad/geolemmas.pdf`. (aufgerufen am 16.03.2021).