52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Kurs für Internationale „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 10. April 2021

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Daniel Holmes zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 7. April 2021 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Daniel Holmes bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 10. April 2021 von 13:15–15:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Hall und Ramsey

Einführung

Herzlich willkommen! Nachdem im Laufe dieses Kurses bereits allerlei spannende Themen behandelt wurden, wollen wir mit diesem Blatt ein paar übrig gebliebene Themen aufklauben, die den bisherigen in ihrer Eleganz jedoch um nichts nachstehen. Inhaltlich bewegen wir uns dabei in der Graphentheorie und bedienen uns folgender Definitionen:

Definition 1 (Graph)**.** Ein *(einfacher[1]) Graph* $G = (V, E)$ besteht aus:

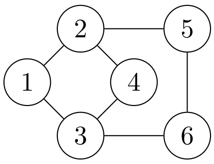
- einer Menge V an *Knoten* (englisch *vertices*); und
- einer Menge $E \subseteq \{\{a, b\} : a, b \in V,\ a \neq b\}$ an *Kanten* (englisch *edges*).

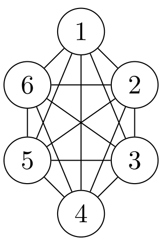
Der Graph heißt *endlich*, falls V endlich ist.

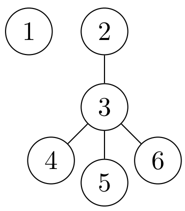
Definition 2 (Grad und Nachbarschaft)**.** Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $v \in V$ ein Knoten.

- Die *Nachbarschaft von* v ist $N(v) := \{w \in V : \{v, w\} \in E\}$.
- Der *Grad von* v ist $d(v) := |N(v)|$.
- Die *Nachbarschaft von* $A \subseteq V$ ist $N(A) := \bigcup_{a \in A} N(a)$.

Beispiel. Unten abgebildet sind drei Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, \ldots, 6\}$. Für den Graphen rechts gilt $E = \{\{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}\}$. Für den Graphen links gilt $d(1) = 2$ und $N(1) = \{2, 3\}$. Der mittlere Graph heißt *vollständig*, da alle Kanten vorhanden sind.





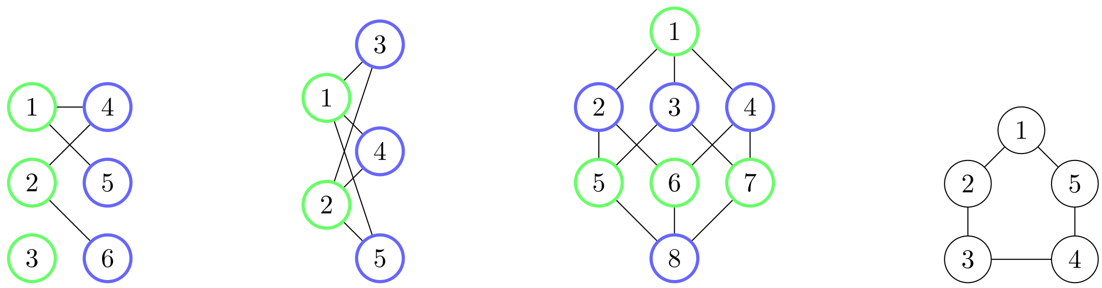


[1] Auf diesem Zettel sind alle Graphen einfach, also genau wie definiert: ungerichtet und ohne Schleifen.

Satz von Hall

Definition 3 (Bipartiter Graph)**.** Ein Graph $G = (V, E)$ ist *bipartit*, falls es $A, B \subseteq V$ mit $A \cup B = V$ und $A \cap B = \emptyset$ gibt, sodass alle Kanten ausschließlich zwischen A und B verlaufen, sprich $E \subseteq \{\{a, b\} : a \in A,\ b \in B\}$.
Ist G bipartit, so schreiben wir $G = (A \cup B, E)$.

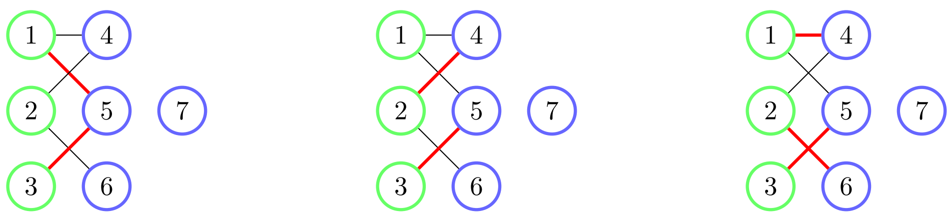
Beispiel. Die drei linken Graphen sind bipartit (A = grüne Knoten, B = blaue Knoten). Der rechte Graph ist nicht bipartit. Überlege: Ein "Kreisgraph" mit n Knoten ist genau dann bipartit, wenn n gerade ist.



Definition 4 (Matching)**.** Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

- Ein *Matching* $M \subseteq E$ ist eine Menge von Kanten, sodass jeder Knoten $v \in V$ in höchstens einem Element von M vorkommt.
- Sei M ein Matching und $A \subseteq V$ eine Menge von Knoten. A heißt *gesättigt von* M, wenn jedes Element von A in M vorkommt, sprich für jedes $a \in A$ gibt es eine Kante $\{a, b\} \in M$.

Beispiel. Unten ist dreimal der gleiche bipartite Graph $G = (A \cup B, E)$ abgebildet. Die Menge $M \subseteq E$ ist rot eingezeichnet, A grün und B blau. Links ist M kein Matching. In der Mitte ist M ein Matching, das weder A noch B sättigt. Rechts ist M ein Matching, das A sättigt aber nicht B.



Leitfrage. Gegeben sei ein endlicher bipartiter Graph $G = (A \cup B, E)$. Wann existiert ein Matching $M \subseteq E$, das A sättigt?

Eine einfache notwendige Bedingung für die Existenz eines Matchings, das A sättigt, erhalten wir aus der folgenden Aufgabe:

Aufgabe 1. Sei $G = (A \cup B, E)$ ein endlicher bipartiter Graph und M ein Matching, das A sättigt. Dann gilt $|N(A')| \geq |A'|$ für alle $A' \subseteq A$.

Ist diese Bedingung auch ausreichend? Der Satz von Hall beantwortet das mit "Ja!". Zum Beweis verwenden wir folgendes Lemma:

Aufgabe 2. Sei $G = (A \cup B, E)$ ein endlicher bipartiter Graph mit $|N(A')| \geq |A'|$ für alle $A' \subseteq A$. Sei weiters $M \subseteq E$ ein Matching. Zeige: Wenn A nicht durch M gesättigt ist, dann gibt es ein anderes Matching $\hat{M} \subseteq E$ mit $|\hat{M}| > |M|$.

Aus Aufgabe 1 und Aufgabe 2 erhalten wir nun den Satz von Hall:

Theorem 1 (Satz von Hall)**.** Sei $G = (V, E)$ ein endlicher bipartiter Graph. Dann gilt: Es existiert dann und nur dann ein Matching $M \subseteq E$, das A sättigt, wenn $|N(A')| \geq |A'|$ für alle $A' \subseteq A$ gilt.

Beweis. Die eine "nur dann"-Richtung ist Aufgabe 1.
Für die "dann"-Richtung verwenden wir Aufgabe 2: Sei M ein Matching. Wenn A nicht durch M gesättigt ist, dann gibt es ein anderes Matching $\hat{M} \subseteq E$ mit $|\hat{M}| > |M|$. Da der Graph endlich ist, gibt es ein Matching mit maximaler Größe, das folglich A sättigen muss. □

Aufgaben zum Satz von Hall

Aufgabe 3. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *k-regulär*, wenn $d(v) = k$ für jeden Knoten $v \in V$ gilt. Sei $G = (A \cup B, E)$ ein endlicher k-regulärer bipartiter Graph mit $k \geq 1$. Zeige, dass es ein Matching $M \subseteq E$ gibt, das sowohl A als auch B sättigt.

Aufgabe 4. Ein *lateinisches Rechteck* ist eine Tabelle mit r Zeilen und n Spalten, wobei in jedem Feld eine ganze Zahl aus der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ steht, und jede Zahl in jeder Spalte und in jeder Zeile höchstens einmal vorkommt. Ein lateinisches Rechteck heißt *lateinisches Quadrat*, wenn $r = n$ gilt.
Zeige, dass jedes lateinische Rechteck zu einem lateinischen Quadrat erweitert werden kann, indem man $n - r$ Zeilen hinzufügt.

Aufgabe 5. Isaac und Gottfried spielen ein Spiel mit einem quadratischen Stück Papier der Fläche A. Sei n eine fixe natürliche Zahl. Zuerst zeichnet Isaac auf der Vorderseite endlich viele gerade Strecken ein, die das Papier in n verschiedene Bereiche $T_1, \ldots, T_n$ mit gleichem Flächeninhalt A/n teilen. Dann zeichnet Gottfried auf der Rückseite endlich viele gerade Strecken ein, die das Papier ebenso in n verschiedene Bereiche $S_1, \ldots, S_n$ des gleichen Flächeninhalts A/n teilen. Zeige, dass es n verschiedene Punkte $x_1, \ldots, x_n$ auf dem Blatt gibt, sodass gilt: Wenn man durch das Papier in jedem der n Punkte ein Loch sticht, dann enthält jeder Bereich auf der Vorderseite und jeder Bereich auf der Rückseite genau ein Loch.

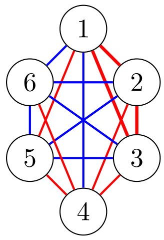
Ramsey Theorie

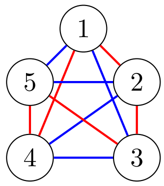
Hier geht es um Färbungen der Kanten in einem Graph. Plakativ lautet die Frage, die wir uns stellen: "Wie groß muss ein Graph mit gefärbten Kanten sein, damit er auf jeden Fall eine bestimmte einfärbige Struktur enthält?" Dazu ein einführendes Beispiel:

Definition 5 (Vollständiger Graph)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Der *vollständlge Graph auf n Knoten* ist $K_n = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, wobei alle zwei verschiedenen Knoten durch eine Kante verbunden sind, also $E = \{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq n\}$.

Aufgabe 6. Wir betrachten den vollständigen Graphen K_6, wobei jede Kante entweder rot oder blau gefärbt ist. Zeige, dass es drei verschiedene Knoten gibt, deren Kanten ein einfärbiges Dreieck bilden.

Beispiel. Links ein kantengefärbter K_6 mit einem einfärbigen roten Dreieck (Knoten 1,2,3). Rechts ein kantengefärbter K_5 ohne einfärbiges Dreieck. Der rechte Graph zeigt, dass Aufgabe 6 nicht mehr stimmt, wenn K_6 durch K_5 ersetzt wird.

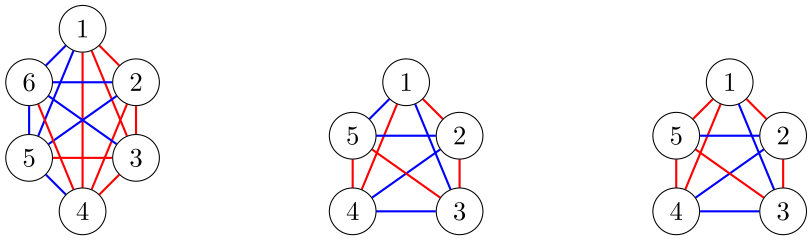




Diese Aufgabe verallgemeinern wir folgendermaßen:

Definition 6 (Einfärbiger Untergraph)**.** In einem vollständigen $K_n = (V, E)$ sei jede Kante mit einer bestimmten Farbe gefärbt. Dieser Graph *enthält einen einfärbigen* K_m, wenn es m verschiedene Knoten $x_1, \ldots, x_m \in V$ gibt, sodass alle Kanten $\{x_i, x_j\}$ mit $1 \leq i < j \leq m$ die gleiche Farbe haben.

Beispiel. Links ein K_6 mit einfärbigem roten K_4 (Knoten 1,2,3,4) und einfärbigem blauen K_3 (Knoten 1,5,6). In der Mitte ein K_5 ohne einfärbigen K_3 aber mit vielen einfärbigen K_2 (jede Kante stellt einen einfärbigen K_2 dar). Rechts ein K_5 mit einem roten K_3 (Knoten 1,4,5).



Leitfrage. Gegeben sei $t \in \mathbb{N}$ und ein vollständiger Graph K_n, in dem jede Kante entweder rot oder blau gefärbt ist. Wie groß muss n mindestens sein, damit der kantengefärbte K_n auf jeden Fall einen einfärbigen K_t enthält? Existiert so ein n überhaupt?

Definition 7 (Ramsey-Zahl)**.** Seien $s, t \in \mathbb{N}_{>0}$. Wir definieren die *Ramsey-Zahl* $R(s,t)$ wie folgt:

$$R(s,t) := \min \left\{ n \in \mathbb{N} : \begin{array}{c} \text{jeder rot-blau-kantengefärbte } K_n \text{ enthält} \\ \text{einen roten } K_s \text{ oder einen blauen } K_t \end{array} \right\}$$

Außerdem definieren wir $R(t) := R(t,t)$.

Existenz von Ramsey-Zahlen und obere Schranke

A priori ist es nicht klar, dass so ein n überhaupt existiert. Aufgabe 6 und das Beispiel unmittelbar darunter zeigen zum Beispiel, dass $R(3) = 6$ gilt. Doch tatsächlich existiert $R(s,t)$ für alle s und t, wie mit Induktion aus der folgenden Aufgabe folgt:

Aufgabe 7. Angenommen $R(s-1,t)$ und $R(s,t-1)$ existieren. Dann existiert auch $R(s,t)$ und es gilt

$$R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1).$$

Daraus erhalten wir den Satz von Ramsey:

Theorem 2 (Satz von Ramsey)**.** Seien $s, t \geq 2$. Dann gibt es eine natürliche Zahl $n = R(s,t)$, sodass jeder rot-blau-kantengefärbte K_n entweder einen roten K_s oder einen blauen K_t enthält.

Beweis. Induktion nach s und t. Aufgabe 7 liefert den Induktionsschritt. Als Induktionsbasis zeigen wir $R(2,t) \leq t$ und $R(s,2) \leq s$: Gegeben sei eine rot-blau-Kantenfärbung des K_t. Wenn es eine rote Kante gibt, dann enthält der K_t einen roten K_2. Anderenfalls sind alle Kanten blau, und der Graph enthält sich selbst als blauen K_t. Daher existiert $R(2,t)$ und es gilt $R(2,t) \leq t$. Das Argument für $R(s,2)$ verläuft genau symmetrisch. □

Hieraus erhalten wir auch gleich eine obere Schranke für die Ramsey-Zahlen:

Aufgabe 8. Beweise, dass $R(s,t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$ für alle $s, t \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ gilt.
Folgere daraus $R(t) \leq 4^t$ für alle $t \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Untere Schranke von Ramsey-Zahlen

Zu guter Letzt schauen wir uns noch eine untere Schranke der Ramsey-Zahlen an. Dabei verwenden wir die *probabilistische Methode*:

Aufgabe 9. Betrachte den vollständigen Graphen K_n, in dem jede Kante unabhängig von den anderen mit der Wahrscheinlichkeit $1/2$ entweder rot oder blau gefärbt wird. Sei $t \geq 2$. Die Zufallsvariable X_t bezeichne die Anzahl der einfärbigen K_t's im zufällig gefärbten K_n. Der Erwartungswert von X_t sei $\mathbb{E}(X_t)$. Zeige:

$$\mathbb{E}(X_t) = 2\binom{n}{t}\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{t}{2}}$$

Folgere daraus, dass $\mathbb{E}(X_t) < 1$ für alle $n < 2^{t/2}$ gilt. Wieso folgt daraus $R(t) \geq 2^{t/2}$?

Insgesamt haben wir also folgende Abschätzung:

$$2^{t/2} \leq R(t) \leq 2^{2t}$$

Verallgemeinerungen

Diese Ergebnisse lassen sich in viele Richtungen verallgemeinern:

- *Mehr Farben:* Für jedes $c \geq 2$ und $s_1, \ldots, s_c \geq 2$ existiert ein n, sodass jede Kantenfärbung des K_n mit c verschiedenen Farben entweder einen K_{s_1} mit Farbe 1, oder einen K_{s_2} mit Farbe 2, ..., oder einen K_{s_c} mit Farbe c enthält.

- *Mehr Knoten:* Sei $G = (V, E)$ ein unendlicher vollständiger Graph mit $V = \mathbb{N}$, in dem jede Kante entweder rot oder blau gefärbt ist. Dann existiert ein einfärbiger Untergraph mit unendlich vielen Knoten.

- *Höhere Dimensionen:* Eine Kantenfärbung ist gleichbedeutend dazu, jeder 2-elementigen Teilmenge von V eine Farbe zuzuordnen. Die Existenz eines einfärbigen Untergraphs für ausreichend großes n gilt nach wie vor, wenn man nicht jeder Kante, sondern jeder r-elementigen Teilmenge eine Farbe zuordnet. Das gilt sowohl im endlichen als auch im unendlichen Fall.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Schubfachschluss und Definition von *Matching*.

Aufgabe 2. Angenommen wir haben ein Matching M und einen Pfad $x_1x_2\ldots x_{2n}$, wobei x_ix_{i+1} abwechselnd nicht in M und in M ist, also $x_1x_2 \notin M$, $x_2x_3 \in M$, $x_3x_4 \notin M$, ..., $x_{2n-1}x_{2n} \notin M$. Außerdem seien weder x_1 noch x_{2n} in einem Element von M enthalten. Wie erhalten wir dann ein größeres Matching?

Aufgabe 3. Überprüfe, dass Hall's Bedingung $|N(A')| \geq |A'|$ für alle $A' \subseteq A$ erfüllt ist und verwende den Satz von Hall.

Aufgabe 4. Füge eine Zeile nach der anderen hinzu. Betrachte den bipartiten Graphen $G = (A \cup B, E)$, wobei A die n Felder der neuen Zeile sind und B die Zahlen 1 bis n. Verbinde das Feld $a \in A$ mit der Zahl $i \in B$ genau dann, wenn i in der Spalte von a noch nicht vorkommt. Verwende anschließend den Satz von Hall.

Aufgabe 5. Betrachte den bipartiten Graphen $G = (A \cup B, E)$ mit $A = \{T_1, \ldots, T_n\}$ und $B = \{S_1, \ldots, S_n\}$, wobei T_i und S_j genau dann mit einer Kante verbunden sind, wenn sie sich überschneiden. (Dabei ignorieren wir, dass T_i und S_j auf verschiedenen Seiten des Papiers liegen.)

Aufgabe 6. Schubfachschluss. Betrachte einen Knoten $v \in K_6$ und drei Nachbarn, die mit der gleichen Farbe mit v verbunden sind.

Aufgabe 7. Schubfachschluss im K_n mit $n = R(s-1,t) + R(s,t-1)$. Jeder Knoten hat entweder $R(s-1,t)$ rote oder $R(s,t-1)$ blaue Nachbarn. (Wir nennen einen Nachbarn rot bzw. blau, wenn die verbindende Kante rot bzw. blau gefärbt ist.)

Aufgabe 8. Induktion nach s und t. Betrachte den Basisfall $s = 2$ oder $t = 2$ und verwende Aufgabe 7 für den Induktionsschritt. Beachte außerdem folgende grundlegende Identität des Binomialkoeffizienten:

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b} + \binom{a-1}{b-1}$$

Wieso gilt die Ungleichung $\binom{a}{b} \leq 2^a$?

Aufgabe 9. Die Anzahl der t-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ ist $\binom{n}{t}$. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte t-elementige Teilmenge von K_n einfärbig ist? Verwende außerdem die *Additivität des Erwartungswertes* aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung: Für zwei Zufallsvariablen X und Y gilt $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.
Für den mittleren Teil verwende die folgende Abschätzung:

$$\binom{n}{t} \leq \frac{n^t}{t!}$$

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge ausgearbeitet von Daniel Holmes, bearbeitet vom MmF-Team.

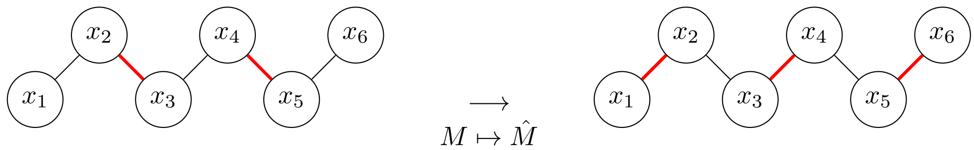
Aufgabe 1.

Sei $G = (A \cup B, E)$ ein endlicher bipartiter Graph und M ein Matching, das A sättigt. Sei $A' \subseteq A$. Dann definieren wir die Funktion $f : A' \to N(A')$ durch $f(a) = b$, wobei $b \in B$ das eindeutige Element aus B ist, für das $\{a, b\}$ in M ist. Dieses Element ist eindeutig, weil M ein Matching ist, und es es existiert, weil A von M gesättigt ist. Außerdem ist $b \in N(A')$, weil $\{a, b\} \in M \subseteq E$.
Da M ein Matching ist, gibt es außerdem für jedes $b \in B$ höchstens ein $a \in A$ mit $f(a) = b$. Daher ist f injektiv. Daraus folgt:

$$|A'| = |f(A')| \leq |N(A')|$$

Aufgabe 2.

Sei G ein Graph und M ein Matching. Ein Pfad $x_1 x_2 \dots x_m$ in G heißt M-*alternierend*, wenn $x_i x_{i+1}$ abwechselnd nicht in M und in M liegt. Also $x_1 x_2 \notin M$, $x_2 x_3 \in M$, $x_3 x_4 \notin M$ und so weiter.



Wir betrachten die folgende Operation: Angenommen wir haben ein Matching M und einen M-alternierenden Pfad $x_1 \dots x_{2n}$, wobei x_1 und x_{2n} in keinem Element von M vorkommen. Dann sei

$$\hat{M} := (M \setminus \{x_2 x_3, \dots, x_{2n-2} x_{2n-1}\}) \cup \{x_1 x_2, x_3 x_4, \dots, x_{2n-1} x_{2n}\}$$

Da x_1 und x_{2n} nicht in M vorkommen, ist $\hat{M}$ ein Matching und es gilt $|\hat{M}| = |M| + 1 > |M|$.
Sei nun $G = (A \cup B, E)$ der gegebene bipartite Graph, in dem Hall's Bedingung erfüllt ist, und M ein Matching, das A nicht sättigt. Dann existiert ein $a_0 \in A$, das in keinem Element von M vorkommt. Wir leiten nun einen Widerspruch aus der Annahme her, dass es *kein* größeres Matching als M gibt. Dazu konstruieren wir induktiv Mengen $A_t \subseteq A$ und $B_t \subseteq B$, sodass für alle $t \geq 0$ gilt:

1. $|A_t| = |B_t| = t$ und $a_0 \notin A_t$.
2. M matcht A_t eins-zu-eins mit B_t.
3. Jedes $a \in A_t$ und $b \in B_t$ ist von a_0 aus mit einem M-alternierenden Pfad mit Knoten in $A_t \cup \{a_0\} \cup B_t$ erreichbar.

Konstruktion von A_t und B_t: Setze $A_0 = B_0 = \emptyset$. Dann sind die Bedingungen 1.-3. klarerweise erfüllt für $t = 0$.
Induktionsschritt: Angenommen A_t und B_t sind definiert. Dann gilt wegen Hall's Bedingung:

$$|N(A_t \cup \{a_0\})| \geq |A_t \cup \{a_0\}| = t + 1 = |B_t| + 1$$

Daher existiert ein $b_{t+1} \in N(A_t \cup \{a_0\}) \setminus B_t$. OBdA sei $A_t = \{a_1, \dots, a_t\}$ und $a_i b_{t+1} \in E$. Da a_i bereits über M mit einem Element in B_t gematcht ist, ist $a_i b_{t+1} \notin M$. Daher gibt es einen M-alternierenden Pfad von a_0 nach b_{t+1}. Wenn b_{t+1} in keinem Element von M vorkäme, dann könnten

wir die oben beschriebene Operation auf diesen M-alternierenden Pfad anwenden und erhielten ein größeres Matching, was unserer Annahme widerspricht. Daher kommt b_{t+1} in einem Element von M vor, sagen wir $\{a_{t+1}, b_{t+1}\} \in M$. Da A_t bereits mit B_t gematcht ist, und $b_{t+1} \notin B_t$, ist $a_{t+1} \notin A_{t+1}$. Da es außerdem einen M-alternierenden Pfad von a_0 nach b_{t+1} gibt, und $\{a_{t+1}, b_{t+1}\} \in M \subseteq E$, ist auch a_{t+1} über einen M-alternierenden Pfad von a_0 aus erreichbar.
Wir setzen nun $A_{t+1} := A_t \cup \{a_{t+1}\}$ und $B_{t+1} := B_t \cup \{b_{t+1}\}$. Überprüfe, dass dann tatsächlich die Bedingungen 1.-3. für $t+1$ erfüllt sind. (Ende der Konstruktion).
Es gibt also beliebig große Teilmengen A_t von A. Aber A ist endlich - Widerspruch! Daher muss es ein größeres Matching als M geben, wie gewünscht.

Aufgabe 3.

Wir überprüfen zunächst, dass Hall's Bedingung gilt: Für alle $A' \subseteq A$ soll gelten $|N(A')| \geq |A'|$.
Sei also $A' \subseteq A$. Wir zählen nun die Kanten zwischen A' und $N(A')$ auf zwei Arten: Einmal von A' aus und einmal von $N(A')$ aus.
Sei L die Anzahl der Kanten zwischen A' und $N(A')$. Da jeder Knoten in A' genau k Nachbarn hat, und diese per Definition alle in $N(A')$ liegen, gilt $L = k|A'|$.
Andererseits hat jeder Knoten in $N(A')$ genau k Nachbarn, von denen jedoch nicht alle in A liegen müssen. Daher gilt $L \leq k|N(A')|$.
Daraus folgt $k|A'| = L \leq k|N(A')|$. Wegen $k \geq 1$ folgt $|A'| \leq |N(A')|$, also ist Hall's Bedingung erfüllt.
Mit dem Satz von Hall erhalten wir daher ein Matching $M \subseteq E$, das A sättigt. Insbesondere gilt $|A| \leq |B|$. Ein symmetrisches Argument zeigt $|A| \geq |B|$. Daher gilt $|A| = |B|$ und das Matching M, das A sättigt, sättigt auch B, wie benötigt.

Aufgabe 4.

Angenommen wir haben ein lateinisches Rechteck mit r Zeilen und n Spalten und $r < n$. Es reicht zu zeigen, dass wir eine Zeile hinzufügen können, um ein lateinisches Rechteck mit $r+1$ Zeilen zu erhalten.
Dazu definieren wir den bipartiten Graph $G = (A \cup B, E)$, wobei $A = \{F_1, \ldots, F_n\}$ die n Felder der hinzuzufügenden Zeile bezeichnet und $B = \{1, \ldots, n\}$ die natürlichen Zahlen von 1 bis n sind.
Wir verbinden nun ein Feld $F_i \in A$ mit einer Zahl $j \in B$ genau dann, wenn die Zahl j in den r Feldern der i-ten Spalte noch nicht vorkommt. Formal aufgeschrieben:

$$E = \{\{F_i, j\} : j \text{ kommt in der } i\text{-ten Spalte noch nicht vor.}\}$$

Wenn wir nun ein Matching M finden, das A sättigt, dann ist das das Gleiche wie eine injektive Funktion $f : \{F_1, \ldots, F_n\} \to \{1, \ldots, n\}$, sodass $f(F_i)$ in der i-ten Spalte noch nicht vorkommt. Dann fügen wir $f(F_1), \ldots, f(F_n)$ als $(r+1)$-te Zeile zur Tabelle hinzu und sind fertig.
Es bleibt also zu zeigen, dass der bipartite Graph G die Hall-Bedingung erfüllt. Laut Aufgabe 3 reicht es zu zeigen, dass G ein k-regulärer Graph mit $k \geq 1$ ist. Das ist hier tatsächlich der Fall:
In den r bisher ausgefüllten Feldern der i-ten Spalte stehen r verschiedene Zahlen, daher bleiben $(n-r)$ Zahlen für das Feld F_i übrig und $d(F_i) = n - r$ im Graphen G.
Umgekehrt kommt jede Zahl $j \in B$ in jeder der r bisher ausgefüllten Zeilen genau einmal vor. Daher kommt j bereits in genau r verschiedenen Spalten vor und es gibt genau $(n-r)$ Spalten, in denen j noch nicht vorkommt. Daher gilt $d(j) = n - r$ im Graphen G.
G ist also $(n-r)$-regulär und $n - r \geq 1$ wegen $n > r$. Daher sind wir fertig, wie oben besprochen. (Wegen Aufgabe 3 hat G ein Matching, das sowohl A als auch B sättigt, und das ist genau die

Information die wir benötigen, um die $(r+1)$-te Zeile auszufüllen).

Aufgabe 5.

Definiere den bipartiten Graphen $G = (A \cup B, E)$ durch $A = \{T_1, \ldots, T_n\}$ und $B = \{S_1, \ldots, S_n\}$, wobei T_i und S_j genau dann mit einer Kante verbunden sind, wenn sie sich überschneiden. (Dabei ignorieren wir, dass T_i und S_j auf verschiedenen Seiten des Papiers liegen.)
Wir zeigen, dass G die Hall Bedingung erfüllt: Sei $A' \subseteq A$ und definiere $k := |A'|$. Dann deckt A' insgesamt die Fläche kA/n ab, da alle T_i den gleichen Flächeninhalt A/n haben. Da gleichermaßen alle $S_i \in B$ die gleiche Fläche A/n haben, müssen die Elemente von A' sich insgesamt mit mindestens k verschiedenen Bereichen S_j aus B überschneiden.
Für den Graphen G bedeutet das: $|N(A')| \geq k = |A'|$.
Wegen dem Satz von Hall existiert also ein Matching M im Graphen G, das A sättigt. Da $|A| = |B| = n$ gilt, können wir dieses Matching anschreiben als

$$M = \{\{T_i, S_{\sigma(i)}\} : 1 \leq i \leq n\}$$

wobei $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ eine Bijektion ist.
Jetzt wählen wir die Punkte $x_1, \ldots, x_n$ auf dem Blatt wie folgt: x_i sei irgendein Punkt im Inneren der Überschneidung der Bereiche T_i und $S_{\sigma(i)}$. Stechen wir nun durch jeden dieser Punkte ein Loch, so enthält jeder Bereich T_i auf der Vorderseite und jeder Bereich S_j auf der Rückseite genau ein Loch, da σ eine Bijektion ist.

Aufgabe 6.

Sei $K_6 = (V, E)$ rot-blau-kantengefärbt und sei $v \in V$ ein beliebiger Knoten. Da $d(v) = 5$ gilt, und jede Kante entweder rot oder blau ist, hat v nach Schubfachschluss entweder mindestens drei rote Kanten oder drei blaue Kanten.
OBdA habe v drei rote Kanten, die wir $\{v, w_1\}, \{v, w_2\}, \{v, w_3\}$ nennen. Dann gibt es zwei Fälle:
Fall 1: Eine der Kanten $\{w_i, w_j\}$ mit $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$ ist rot. Dann bildet v, w_i, w_j ein rotes (und somit einfärbiges) Dreieck, und wir sind fertig.
Fall 2: Alle Kanten $\{w_i, w_j\}$ mit $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$ sind blau. Dann bildet w_1, w_2, w_3 ein blaues (und somit einfärbiges) Dreieck, und wir sind ebenfalls fertig.

Aufgabe 7.

Sei $n = R(s-1, t) + R(s, t-1)$ und sei $K_n = (V, E)$ rot-blau-kantengefärbt. Sei $v \in V$ ein beliebiger Knoten. Dann hat v mindestens $R(s-1, t)$ rote Kanten oder $R(s, t-1)$ blaue Kanten. (Anderenfalls wäre $d(v) < R(s-1, t) + R(s, t-1) = n$, was ein Widerspruch ist.)
OBdA habe v mindestens $R(s-1, t)$ rote Kanten, sagen wir $\{v, w_1\}, \ldots, \{v, w_{R(s-1,t)}\}$. Wegen der Definition von $R(s-1, t)$ und der Annahme, dass diese Zahl wohldefiniert ist und existiert, enthält der Untergraph mit den Knoten $\{w_1, \ldots, w_{R(s-1,t)}\}$ entweder einen roten K_{s-1} oder einen blauen K_t.
Fall 1: $\{w_1, \ldots, w_{R(s-1,t)}\}$ enthält einen blauen K_t. Dann enthält K_n ebenso den gleichen blauen K_t und wir sind fertig.
Fall 2: $\{w_1, \ldots, w_{R(s-1,t)}\}$ enthält einen roten K_{s-1}. Fügen wir v zu diesem roten K_{s-1} hinzu, erhalten wir einen roten K_s, da $\{v, w_i\}$ für alle i rot ist. Dieser rote K_s ist ein Untergraph des ursprünglichen K_n und wir sind fertig.

Aufgabe 8.

Induktion nach $s+t$ mit $s,t \geq 2$. Basisfall $s=2$ oder $t=2$: Sei K_n ein rot-blau-kantengefärbter K_n mit $n \geq 2$. Dann sind entweder alle Kanten rot und der K_n enthält sich selbst als roten K_n, oder es existiert eine blaue Kante, die einen blauen K_2 im K_n darstellt. Daher gilt:

$$R(s,2) \leq s = \binom{s+2-2}{s-1}$$

wie benötigt. Vertauscht man im Argument die Farben rot und blau, erhält man symmetrisch

$$R(2,t) \leq t = \binom{2+t-2}{2-1}$$

wie benötigt. Damit ist die Induktionsbasis gezeigt.
Induktionsschritt: Wir verwenden folgende Identität des Binomialkoeffizienten:

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b} + \binom{a-1}{b-1}$$

(Diese Identität kann man wie folgt herleiten: $\binom{a}{b}$ ist die Anzahl der b-elementigen Teilmengen der Menge $\{1,\dots,a\}$. Diese Teilmengen lassen sich in zwei disjunkte Klassen einteilen: Einerseits die b-elementigen Teilmengen der Menge $\{1,\dots,a-1\}$ und andererseits die $(b-1)$-elementigen Teilmengen der Menge $\{1,\dots,a-1\}$, zu denen a hinzugefügt wird. Die erste Klasse enthält $\binom{a-1}{b}$ Elemente, die zweite Klasse enthält $\binom{a-1}{b-1}$ Elemente. Daraus folgt die Identität.)
Diese Identität verwenden wir nun für den Induktionsschritt: Aus Aufgabe 7 wissen wir:

$$R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1)$$

Durch Anwenden der Induktionsannahme erhalten wir:

$$R(s,t) \leq \binom{s+t-3}{s-2} + \binom{s+t-3}{s-1} = \binom{s+t-2}{s-1}$$

Damit ist $R(s,t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$ für alle $s,t \geq 2$ gezeigt.
Für $R(t) \leq 4^t$ verwenden wir folgende grundlegende Ungleichung: Die Anzahl der Teilmengen von $\{1,\dots,a\}$ ist 2^a. Die Anzahl der b-elementigen Teilmengen von $\{1,\dots,a\}$ ist $\binom{a}{b}$. Daher gilt $\binom{a}{b} \leq 2^a$.
Daraus erhalten wir $R(t) = R(t,t) \leq \binom{2t-2}{t-1} \leq 2^{2t-2} \leq 2^{2t} = 4^t$, wie benötigt.

Aufgabe 9.

(Nach Paul Erdős). Für jede t-elementige Teilmenge $A = \{x_1,\dots,x_t\} \subseteq \{1,\dots,n\}$ definieren wir die Zufallsvariable

$$Y_A := \begin{cases} 1 & \text{falls } A \text{ einen einfärbigen } K_t \text{ darstellt;} \\ 0 & \text{anderenfalls.} \end{cases}$$

Dann gilt:

$$X_t = \sum_{\substack{A \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |A| = t}} Y_A$$

Zunächst berechnen wir den Erwartungswert von Y_A. Da Y_A aus t verschiedenen Knoten besteht, gibt es im dadurch bestimmten Untergraphen $\binom{t}{2}$ Kanten. Jede Kante ist unabhängig von den anderen entweder rot oder blau, beides mit Wahrscheinlichkeit 1/2. Daher gibt es $2^{\binom{t}{2}}$ verschiedene gleich wahrscheinliche Kantenfärbungen dieses Untergraphs. Genau zwei davon sind einfärbig (alle Kanten rot oder alle Kanten blau). Daher gilt:

$$\mathbb{E}(Y_A) = \frac{2}{2^{\binom{t}{2}}} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{t}{2}}$$

Insgesamt erhalten wir also (mit der Additivität des Erwartungswertes):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}\left(\sum_{\substack{A \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |A| = t}} Y_A\right) &= \sum_{\substack{A \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |A| = t}} \mathbb{E}(Y_A) \\
&= \sum_{\substack{A \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |A| = t}} 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{t}{2}} \\
&= 2\binom{n}{t}\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{t}{2}}
\end{aligned}$$

Damit ist der erste Teil der Aussage gezeigt.
Sei nun $n < 2^{t/2}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_t) = 2\binom{n}{t}\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{t}{2}} &= 2\binom{n}{t}2^{-t(t-1)/2} \\
&\leq 2\frac{n^t}{t!}2^{-t(t-1)/2} \\
&= \frac{2}{t!}\left(n2^{-(t-1)/2}\right)^t \\
&< \frac{2}{t!}\left(2^{t/2}2^{-(t-1)/2}\right)^t \\
&= \frac{2^{1+t/2}}{t!}
\end{aligned}$$

Es bleibt also zu zeigen, dass $\frac{2^{1+t/2}}{t!} \leq 1$ für alle $t \geq 2$ gilt. Das gilt jedoch leider nur für $t \geq 3$, deshalb werden wir den Fall $t = 2$ unten gesondert behandeln. Für $t \geq 3$ verwenden wir Induktion:
Basisfall $t = 3$: Dann gilt $\frac{2^{1+3/2}}{3!} = \sqrt{\frac{2^5}{6^2}} = \sqrt{32/36} < 1$.
Induktionsschritt: $\frac{2^{1+(t+1)/2}}{(t+1)!} = \frac{2^{1+t/2}}{t!} \cdot \frac{2^{1/2}}{t+1}$. Wegen der Induktionsannahme gilt also:

$$\frac{2^{1+(t+1)/2}}{(t+1)!} \leq 1 \cdot \frac{2^{1/2}}{t+1} < 1$$

Für den Sonderfall $t = 2$ haben wir $n < 2^{2/2} = 2$, also $n \leq 1$. Dann ist aber $\binom{n}{t} = \binom{n}{2} = 0$ und folglich $\mathbb{E}(X_t) = 0 < 1$, wie benötigt.
Wir haben also gezeigt: für $n < 2^{t/2}$ gilt $\mathbb{E}(X_t) < 1$.
Wieso folgt daraus nun $R(t) \geq 2^{t/2}$? Das ist die Schlüsselidee der *probabilistischen Methode*: Für $n < 2^{t/2}$ ist $\mathbb{E}(X_t) < 1$. Das heißt, es muss mindestens eine rot-blau-Kantenfärbung des K_n geben, die keinen einfärbigen K_t enthält. (Anderenfalls wäre K_t immer größer gleich eins, und es müsste $\mathbb{E}(X_t) \geq 1$ gelten.)
Damit jeder rot-blau-kantengefärbte K_n einen einfärbigen K_t enthält, muss also $n \geq 2^{t/2}$ gelten. In anderen Worten:

$$R(t) \geq 2^{t/2}$$

wie gewünscht.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

Mathematisches Allgemeinwissen. Siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Heiratssatz

Aufgabe 2.

Mathematisches Allgemeinwissen. Siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Heiratssatz

Aufgabe 3.

Mathematisches Allgemeinwissen.

Aufgabe 4.

Folklore.

Aufgabe 5.

Folklore.

Aufgabe 6.

Mathematisches Allgemeinwissen.

Aufgabe 7.

Mathematisches Allgemeinwissen. Siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Ramsey

Aufgabe 8.

Mathematisches Allgemeinwissen. Siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Ramsey

Aufgabe 9.

Mathematisches Allgemeinwissen. Siehe [1] und https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Ramsey

Literatur

[1] P. Erdős. Some remarks on the theory of graphs. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 53(4):292 – 294, 1947.