52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Kurs für Internationale „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 10. April 2021

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Gerhard Woeginger zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 6. April 2021 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Gerhard Woeginger bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 10. April 2021 von 10:00–11:45 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

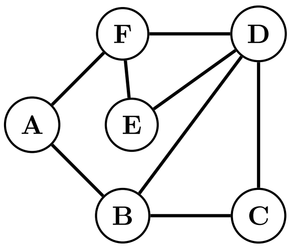
Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Graphentheorie

Einführung

Ein **Graph** $G = (V, E)$ besteht aus einer Menge V von **Knoten** und einer Menge E von **Kanten**. Jede Kante in $e \in E$ verbindet zwei Knoten in V, und diese zwei Knoten heissen dann **benachbart**. Ein Graph ist **zusammenhängend**, wenn jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus durch eine Wanderung entlang von (einer oder mehreren) Kanten erreichbar ist. Ein **Kreis** ist eine Folge $v_1, \ldots, v_k$ von $k \geq 3$ (verschiedenen) Knoten, sodass v_i und v_{i+1} jeweils durch eine Kante verbunden sind (v_{k+1} wird dabei als v_1 definiert).

Ein Graph heisst **planar**, wenn man ihn auf folgende Art in der Ebene zeichnen kann: (i) Die Knoten werden in lauter verschiedene Punkte eingebettet. (ii) Die Kanten werden als Polygonzüge eingebettet, die jeweils ihre beiden Endknoten verbinden. (iii) Polygonzüge für zwei verschiedene Kanten haben keine Punkte gemeinsam (ausser: einem gemeinsamen Endpunkt). Hier ist ein Beispiel für einen planaren Graphen mit sechs Knoten A, B, C, D, E, F und acht Kanten:



In der Abbildung wird die Ebene durch die Kanten in vier Regionen aufgeteilt: Eine dreieckige Region DEF, eine dreieckige Region BCD, eine fünfeckige Region $ABDEF$, und zum Schluss noch die unendliche äussere Region, die $ABCDF$ umgibt. Wir bezeichnen die Anzahl der Knoten mit $v = |V|$, die Anzahl der Kanten mit $e = |E|$, und die Anzahl der Regionen mit f (für “face”, den Englischen Fachausdruck). Für jede Zeichnung eines zusammenhängenden planaren Graphens gilt die Eulersche Polyederformel $v - e + f = 2$.

Aufgaben

Aufgabe 1. (a) Im Graphen $G = (V, E)$ ist jeder Knoten zu genau d anderen Knoten benachbart und je zwei verschiedene Knoten haben genau c gemeinsame Nachbarn. Zeige:

$$c \;=\; \frac{d(d-1)}{|V|-1}.$$

(b) Bestimme alle Paare (k, c) von positiven ganzen Zahlen, für die die folgende Geschichte wahr sein kann: In einer Gruppe von $12k$ Politikern ist jeder Politiker mit genau $3k+6$ anderen Politikern befreundet. Je zwei Politiker haben genau c gemeinsame Freunde.

Aufgabe 2. Es sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph.

(a) Zeige: Dann gilt $|E| \geq |V| - 1$.

(b) Zeige: Falls $|E| = |V| - 1$ gilt, gibt es zwischen je zwei Knoten genau einen Verbindungsweg.

Aufgabe 3. Es sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender planarer Graph mit $|V| \geq 3$.

(a) Zeige: $|E| \leq 3|V| - 6$

(b) Zeige: Es gibt einen Knoten, der zu höchstens fünf anderen Knoten benachbart ist.

(c) Der Graph K_5 hat fünf Knoten und zwischen jedem Knotenpaar eine Kante. Zeige: K_5 ist nicht planar.

Aufgabe 4. Es sei $k \geq 4$ eine ganze Zahl, und es sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender planarer Graph mit $|V| \geq k$, in dem der kürzeste Kreis in G aus k Knoten besteht.

(a) Zeige: $|E| \leq \frac{k}{k-2}(|V| - 2)$.

(b) Der Graph $K_{3,3}$ besteht aus drei weißen und drei schwarzen Knoten und neun Kanten; jeder weiße Knoten ist mit jedem schwarzen Knoten durch eine Kante verbunden. Zeige: $K_{3,3}$ ist nicht planar.

Aufgabe 5. Es sei P eine Menge von n Punkten in der Ebene, sodass verschiedene Punkte in P immer einen Abstand von mindestens 1 haben. Zeige: Es gibt höchstens $3n - 6$ Punktepaare in P, deren Abstand von einander genau 1 beträgt.

Aufgabe 6. Der Graph $K_{s,t}$ besteht aus s weißen und t schwarzen Knoten und $s \cdot t$ Kanten; jeder weiße Knoten ist mit jedem schwarzen Knoten durch eine Kante verbunden. Bestimme alle Paare (s, t) von positiven ganzen Zahlen, für die der Graph $K_{s,t}$ planar ist.

Aufgabe 7. Für $n \geq 5$ betrachten wir den Graphen mit n Knoten $v_1, \ldots, v_n$ und mit den $2n$ Kanten $\{v_i, v_{i+1}\}$ und $\{v_i, v_{i+2}\}$ für $1 \leq i \leq n$ (dabei definieren wir $v_{n+1} = v_1$ und $v_{n+2} = v_2$). Bestimme alle $n \geq 5$, für die dieser Graph planar ist.

Aufgabe 8. Es sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender planarer Graph. Zeige, dass man die Knoten in V derart mit den drei Farben rot, gelb, blau färben kann, sodass auf jedem Kreis in G mindestens zwei verschiedene Farben auftreten.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1.
(a) Betrachte einen beliebigen Knoten v, die Menge V_1 der Nachbarn von v, und die Menge V_2 der restlichen Knoten. Dann ist jeder Knoten in V_2 zu einem Knoten in V_1 benachbart (warum?). Jeder Knoten in V_1 hat genau $d - c - 1$ Nachbarn in V_2 (warum?). Es gibt genau $(d - c - 1)d$ Kanten zwischen V_1 und V_2 (warum?). Und es gibt genau $(|V| - d - 1)c$ Kanten zwischen V_1 und V_2 (warum?).
(b) Verwende (a).

Aufgabe 3.
(a) Zeige $f \leq 2|E|/3$ und verwende die Eulersche Polyederformel.
(b) Verwende (a).
(c) Verwende (a).

Aufgabe 4.
(a) Zeige $f \leq 2|E|/k$ und verwende die Eulersche Polyederformel.
(b) Verwende (a).

Aufgabe 5.
Betrachte den Graphen, der die Punkte in P als Knoten hat und dessen Kanten den Punktpaaren mit Abstand genau 1 entsprechen. Zeige, dass dieser Graph planar ist.

Aufgabe 6.
Unterscheide $\min\{s, t\} \leq 2$ und $\min\{s, t\} \geq 3$.

Aufgabe 7.
Die Antwort hängt von der Parität von n ab.

Aufgabe 8.
Entferne einen Knoten v mit wenigen Nachbarn, färbe den Restgraphen induktiv, und finde dann eine geeignete Farbe für den Knoten v.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Gerhard Woeginger, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.
(a) Wir fixieren einen beliebigen Knoten v. Die Menge V_1 mit $|V_1| = d$ enthält die Nachbarn von v, und die Menge V_2 enthält alle restlichen Knoten. Da jeder Knoten in V_2 einen gemeinsamen Nachbarn mit v hat und da dieser gemeinsame Nachbar nur ein V_1 liegen kann, ist jeder Knoten in V_2 zu einem Knoten in V_1 benachbart. Nun zählen wir die Anzahl z der Kanten zwischen V_1 und V_2 auf zwei verschiedene Arten:

- Jeder Knoten in V_1 ist (i) zu v benachbart, hat (ii) c Nachbarn mit v gemein, die alle in V_1 liegen, und hat (iii) noch $d - c - 1$ weitere Nachbarn in V_2. Wegen $|V_1| = d$ erhalten wir nun $z = (d - c - 1)d$.
- Jeder Knoten in V_2 hat (i) genau c Nachbarn mit v gemein, die alle in V_1 liegen und hat $d-c$ weitere Nachbarn in V_2. Mit $|V_2| = |V| - d - 1$ erhalten wir nun $z = (|V| - d - 1)c$.

Die Gleichung $(d - c - 1)d = (|V| - d - 1)c$ ist zu $c = d(d - 1)/(|V| - 1)$ äquivalent.
(b) Aus Teil (a) folgt mit $|V| = 12k$ und $d = 3k+6$, dass $c = (3k+6)(3k+5)/(12k-1)$ gilt. Daher muss $12k - 1$ ein Teiler von $(3k + 6)(3k + 5) = 3(k + 2)(3k + 5)$ sein. Da $12k - 1$ zu $12 = 3 \cdot 4$ teilerfremd ist, muss $12k - 1$ auch ein Teiler von $4(k + 2)(3k + 5) = 12k^2 + 44k + 40$ sein. Wegen

$$12k^2 + 44k + 40 \;=\; (k + 3)(12k - 1) + 9k + 43,$$

ist $12k - 1$ ein Teiler von $9k + 43$, und somit $12k - 1 \le 9k + 43$. Wir folgern $3k \le 44$ und $k \le 14$. Wenn man sich durch die Fälle durcharbeitet, bleibt nur $(k, c) = (3, 6)$ übrig.

Aufgabe 3.
(a) Der Umfang einer Region ist die Anzahl von Kanten am Rande dieser Region. Da der Umfang jeder Region mindestens 3 beträgt, ist die Summe der Umfänge aller Regionen mindestens $3f$. Da jede Kante zum Umfang von zwei Regionen beiträgt, ist die Summe der Umfänge aller Regionen höchstens $2|E|$. Wir folgern $3f \le 2|E|$. Die Eulersche Polyederformel liefert nun die Ungleichung $|E| - |V| + 2 = f \le 2|E|/3$, die $|E| \le 3|V| - 6$ impliziert.
(b) Der Grad eines Knoten v ist die Anzahl $\deg(v)$ seiner Nachbarn. Die Summe aller Knotengrade erfüllt die Gleichung

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|,$$

da jede Kante zum Grad ihrer beiden Endknoten beiträgt. Laut (a) gilt nun für die rechte Seite der Gleichung $2|E| \le 6|V| - 12$. Wäre jeder Knotengrad ≥ 6, so wäre die linke Seite der Gleichung mindestens $6|V|$.
(c) Der K_5 mit $|V| = 5$ und $|E| = 10$ widerspricht der Ungleichung $|E| \le 3|V| - 6$ in (a).

Aufgabe 4.
(a) Das geht analog zum Teil (a) von Aufgabe 3: Wenn der kürzeste Kreis mindestens k Knoten hat, ist der Gesamtumfang aller Regionen $\ge kf$ und $\le 2|E|$. Wir folgern $f \le 2|E|/k$. Die Eulersche Polyederformel liefert $|E| - |V| + 2 = f \le 2|E|/k$, und somit $|E| \le \frac{k}{k-2}(|V| - 2)$.
(b) Da der kürzeste Kreis im $K_{3,3}$ aus $k = 4$ Knoten besteht, liefert (a) die Ungleichung $|E| \le 2|V| - 4$. Der $K_{3,3}$ mit $|V| = 6$ und $|E| = 9$ verletzte diese Ungleichung.

Aufgabe 5.
(Zur Erinnerung: In einem konvexen Viereck $ABCD$ ist die Summe $|AC| + |BD|$ der Längen der

beiden Diagonalen größer als die Summe $|AB|+|CD|$ oder $|AD|+|BC|$ von zwei gegenüberliegenden Seiten.) Wir betrachten den Graphen $G = (P, E)$, der die Punkte in P als Knoten hat und dessen Kanten den Punktpaaren mit Abstand genau 1 entsprechen. Falls sich zwei Kanten/Strecken AC und BC schneiden, gilt $|AB| + |CD| < |AC| + |BD| = 2$, und weiters $|AB| < 1$ oder $|CD| < 1$, im Widerspruch zur Angabe. Somit ist der Graph G planar, und Teil (a) von Aufgabe 3 liefert die gewünschte Ungleichung.

Aufgabe 6.
Wir nehmen aus Symmetriegründen $s \leq t$ an. Wir zeigen, dass der $K_{s,t}$ für $s = 1$ und $s = 2$ planar und für $s \geq 3$ nicht planar ist.
Wenn $s = 2$ ist, bettet man die t schwarzen Punkte in $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 0)$, $\ldots$, $(t, 0)$ ein, und die beiden weißen Punkte in $(0, 1)$ und $(0, -1)$; die Kanten sind die Verbindungsstrecken ihrer Endpunkte. Wenn $s = 1$ ist, lässt man den Punkt $(0, -1)$ weg.
Wenn $s \geq 3$, enthält der $K_{s,t}$ einen $K_{3,3}$ als Teilgraphen. Bettet man den $K_{s,t}$ planar ein, erhält man auch eine planare Einbettung von $K_{3,3}$. Das widerspricht Teil (b) von Aufgabe 4.

Aufgabe 7.
Wenn n gerade ist, bettet man $v_1, \ldots, v_n$ im Uhrzeigersinn auf einem Kreis ein. Die Kanten $\{v_i, v_{i+1}\}$ bettet man entlang des Kreises ein. Die Kanten $\{v_i, v_{i+2}\}$ mit geradem Index i bettet man als Strecken im Inneren des Kreises ein, und die Kanten $\{v_i, v_{i+2}\}$ mit ungeradem Index i werden ausserhalb des Kreises eingebettet. Das ergibt eine planare Zeichnung.
Wenn n aber ungerade ist, ist der betrachtete Graph G_n nicht planar. Für $n = 5$ fällt der Graph mit K_5 zusammen und ist wegen Teil (c) von Aufgabe 3 nicht planar. Für $n \geq 7$ nehmen wir zwecks Widerspruchs an, dass es eine planare Zeichnung von G_n gibt, und zeigen, dass dann auch der $K_{3,3}$ planar ist (und das ist im Widerspruch zu Teil (b) von Aufgabe 4).

- Die Knoten v_1, v_4, v_5 sind drei weiße Knoten. Die Knoten v_2, v_3, v_6 sind drei schwarze Knoten.
- Sieben Kanten zwischen weißen und schwarzen Knoten sind leicht zu finden: v_1 ist in G_n zu v_2 und v_3 benachbart, v_4 ist zu v_2, v_3, v_6 benachbart, und v_5 ist zu v_3 und v_6 benachbart.
- Nun fehlen noch die beiden Kanten zwischen v_1 und v_6 und zwischen v_2 und v_5. Von v_6 aus konstruieren wir einen Pfad durch die Knoten $v_6, v_8, \ldots, v_{n-1}$ mit geradem Index bis nach v_1. Von v_5 aus konstruieren wir einen Pfad durch die Knoten $v_7, v_9, \ldots, v_n$ mit ungeradem Index bis nach v_2.

Die beiden Pfade und die sieben aufgelisteten Kanten geben uns eine planare Zeichnung von $K_{3,3}$.

Aufgabe 8.
Wir beweisen die Aussage mit Induktion über n. Für $n \leq 3$ färben wir jeden Knoten einfach mit einer anderen Farbe. Im Induktionsschritt betrachten wir einen Knoten v mit Grad ≤ 5 (der laut Teil (b) von Aufgabe 3 existieren muss). Wir löschen v aus dem Graphen und färben den Restgraphen G' induktiv. Dann geben wir v zurück in den Graphen: Die Nachbarn von v sind nun bereits gefärbt und eine der drei Farben taucht entweder gar nicht oder nur einmal in der Nachbarschaft auf. Wir färben v mit einer derartigen Farbe.
Nun betrachten wir einen Kreis. Falls der Kreis ganz im Restgraphen G' liegt, ist er nach Induktion mehrfärbig. Falls der Kreis aber den Knoten v durchläuft, sind die beiden Knoten unmittelbar vor v und unmittelbar nach v Nachbarn von v. Da mindestens einer dieser beiden Nachbarn eine andere Farbe als v hat, ist der Kreis auch in diesem Fall mehrfärbig.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Die meisten Aufgaben sind (alte) Standardübungsaufgaben aus der Graphentheorie, die in vielen Lehrbüchern vorkommen und gelten als mathematische Folklore.