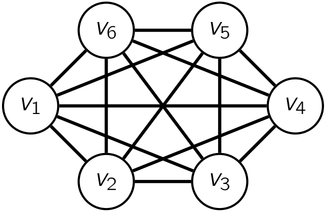
Einführung in die Graphentheorie

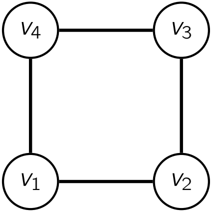
Gerhard J. Woeginger

April 2021, Universität Wien

Grundlegendes (1)

- Ein **Graph** $G = (V, E)$ besteht aus
  einer Menge V von **Knoten** (oder **Punkten**) und
  einer Menge E von **Kanten**.
- Jede Kante $e = \{u, v\} \in E$ verbindet zwei Knoten u und v in V;
  diese beiden Knoten heissen dann **benachbart**.





Grundlegendes (2)

Warum sind Graphen interessant?

- Modellierung von Kommunikationsnetzwerken (Informatik)
- Modellierung von Strassennetzen, Transportnetzen, Energienetzen, sozialen Strukturen, etc, etc

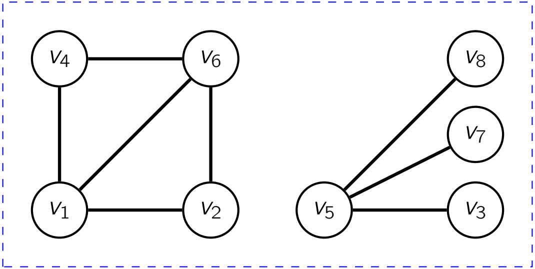
Bei der Mathematikolympiade:

- IMO 2007/3
- IMO 2018/4
- IMO 2019/3
- IMO 2020/3 und IMO 2020/4

Bäume

Bäume (1)

- Ein Graph ist **zusammenhängend**, wenn jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus durch eine Wanderung entlang von (einer oder mehreren) Kanten erreichbar ist.
- Ein **Kreis** ist eine Folge $v_1, \ldots, v_k$ von $k \geq 3$ (paarweise verschiedenen) Knoten, sodass für $1 \leq i \leq k-1$ jeweils v_i und v_{i+1} benachbart sind, und sodass ausserdem v_k und v_1 benachbart sind.
- Ein Graph heisst **kreisfrei**, falls er keinen Kreis enthält.



Bäume (2)

Ein Graph ist ein **Baum**, falls er kreisfrei und zusammenhängend ist.

Die folgenden Aussagen zu einem Graphen $G = (V, E)$ sind paarweise äquivalent:

- G ist kreisfrei und zusammenhängend.
- G ist kreisfrei und es gilt $|E| = |V| - 1$.
- G ist zusammenhängend und es gilt $|E| = |V| - 1$.
- Zwischen je zwei Knoten in V gibt es genau einen Verbindungsweg.

Bäume (3)

- Der **Grad** $\deg(v)$ eines Knotens v ist die Anzahl seiner Nachbarn. (Die Bezeichung $\deg$ kommt vom Englischen Wort “degree”.)
- Beobachtung: $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$

- Ein **Blatt** ist ein Knoten mit Grad 1.
- Beobachtung: Jeder Baum besitzt mindestens zwei Blätter.

Abzählen von Bäumen

Abzählen von Bäumen

Wieviele verschiedene Bäume gibt es

- mit den drei Knoten $1, 2, 3$?
- mit den vier Knoten $1, 2, 3, 4$?
- mit den fünf Knoten $1, 2, 3, 4, 5$?
- mit den sechs Knoten $1, 2, 3, 4, 5, 6$?

Die Formel von Cayley

Satz (Arthur Cayley, 1889)

Für jedes $n \geq 2$ gibt es genau n^{n-2} verschiedene Bäume über der Knotenmenge $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Beweisskizze:

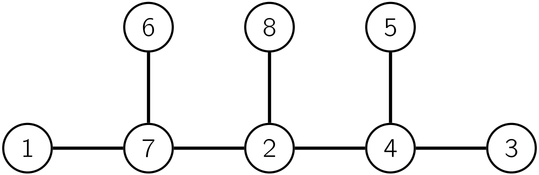
- Es gibt genau n^{n-2} Zahlenfolgen $\langle a_1, a_2, \ldots, a_{n-2} \rangle$, deren Elemente aus der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ stammen.
- Wir zeigen, dass es genau gleich viele Bäume wie Zahlenfolgen gibt.

Beweis: Baum $\rightarrow$ Zahlenfolge

Wiederhole $(n-2)$-mal:

Finde das Blatt mit der kleinsten Nummer b.
Finde den Nachbarn a von b.
Nimm a als nächstes Element in die Zahlenfolge auf.
Lösche Blatt b und Kante $\{a, b\}$.

(Am Ende ist nur noch die Kante zwischen dem Knoten n und der letzten Zahl a_{n-2} in der Zahlenfolge übrig.)



Beweis: Zahlenfolge $\to$ Baum

Es sei $\langle a_1, a_2, \ldots, a_{n-2} \rangle$ eine Zahlenfolge über $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Definiere $a_{n-1} := n$.

FOR $i := 1$ TO $n-1$ DO:
    Definiere b_i als kleinsten Knoten,
    der **nicht** in $\{b_1, \ldots, b_{i-1}\} \cup \{a_i, \ldots, a_{n-1}\}$ vorkommt.

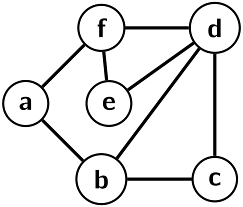
Die Kanten $\{a_i, b_i\}$ mit $1 \le i \le i-1$ bilden den Baum.

Planare Graphen

Planare Graphen (1)

Ein Graph heisst **planar**, wenn man ihn auf folgende Art in der Ebene zeichnen kann:

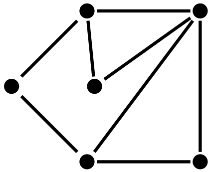
- Jeder Knoten $v \in V$ wird in einen geometrischen Punkt $p(v)$ eingebettet. Verschiedene Knoten kommen in verschiedene Punkte.
- Jede Kante $e = \{u, v\} \in E$ wird in einen Polygonzug $\text{poly}(e)$ eingebettet, der den Punkt $p(u)$ mit dem Punkt $p(v)$ verbindet.
- Die Polygonzüge für zwei verschiedene Kanten e and e' haben keine Punkte gemeinsam (ausser, wenn sie einen gemeinsamen Endpunkt haben).



Planare Graphen (2)

Eine planare Zeichnung eines Graphen $G = (V, E)$ besteht

- aus $v = |V|$ Knoten (Punkten, oder vertices)
- aus $e = |E|$ Kanten (Polygonzügen, oder edges)
- aus f Regionen (Zellen, oder faces)



$v = 6$

$e = 8$

$f = 4$

In der Zeichung gilt: $6 - 8 + 4 = 2$, also $v - e + f = 2$

Die Eulerformel (1)

Euler'sche Polyederformel

In jeder planaren Zeichung eines **zusammenhängenden** planaren Graphens gilt:

$$v - e + f \;=\; 2.$$

Beweisskizze:

- Wir zeigen eine allgemeinere Aussage für Graphen mit c Zusammenhangskomponenten: $v - e + f = c + 1$.
- Der Beweis ist dann eine Induktion über die Anzahl $e \geq 0$ der Kanten: Wie verändern sich v, e, f, c, wenn neue Kanten hinzukommen?

Die Eulerformel (2)

Im allgemeinen kann ein Graph mit v Knoten **quadratisch** viele Kanten haben: Wenn jedes Knotenpaar benachbart ist, sind das insgesamt $\frac{1}{2}v(v-1)$ Kanten.

Ein planarer Graph kann kann nur **linear** viele Kanten haben:

Satz

Ein planarer Graph mit $v \geq 3$ Knoten hat höchstens $3v-6$ Kanten.

Beweisskizze:

- Jede Region hat mindestens drei Kanten in ihrem Rand.
  Ergo: $3f \leq 2e$
- Die Euler'sche Polyederformel liefert dann $e - v + 2 = f \leq 2e/3$.

Die Eulerformel (3)

K_5:

Der Graph K_5 hat $v = 5$ Knoten, die paarweise benachbart sind.
Der Graph K_5 ist nicht planar: $v = 5$ und $e = 10$ kollidieren mit $e \leq 3v - 6$.

$K_{3,3}$:

Der Graph $K_{3,3}$ hat drei weisse und drei schwarze Knoten ($v = 6$) und alle $e = 9$ Kanten zwischen weissen und schwarzen Knoten.

- Der $K_{3,3}$ erfüllt unsere Ungleichung $e \leq 3v - 6$.
- Da der $K_{3,3}$ keine Dreiecke enthält, müßte jede Region mindestens vier Kanten in ihrem Rand haben. Das liefert $4f \leq 2e$ und die verschärfte Ungleichung $e \leq 2v - 4$.
- Daher ist der $K_{3,3}$ nicht planar.

Satz von Kuratowski (1)

- Der K_5 ist nicht planar.
- Wenn ich eine Kante (oder auch mehrere Kanten) im K_5 durch einen Kantenzug ersetze, so ist der resultierende Graph ebenfalls nicht planar.
- Wenn ich dann weitere Knoten und Kanten dazugebe, so ist der resultierende Graph ebenfalls nicht planar.

- Der $K_{3,3}$ ist nicht planar.
- Wenn ich eine Kante (oder auch mehrere Kanten) im $K_{3,3}$ durch einen Kantenzug ersetze, so ist der resultierende Graph ebenfalls nicht planar.
- Wenn ich dann weitere Knoten und Kanten dazugebe, so ist der resultierende Graph ebenfalls nicht planar.

Satz von Kuratowski (2)

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph und $e = \{u, v\} \in E$ eine Kante.

- Die Kante e wird **unterteilt**, indem man e aus dem Graphen löscht und durch einen neuen Knoten w und zwei neue Kanten $\{u, w\}$ und $\{v, w\}$ ersetzt.
- Der Graph H ist eine **Unterteilung** von G, falls er aus G durch wiederholtes Unterteilen von Kanten resultiert.

Beobachtung

Jede Unterteilung eines planaren Graphen ist planar.
Jede Unterteilung eines nicht-planaren Graphen ist nicht-planar.

Satz von Kuratowski (3)

Satz (Kazimierz Kuratowski, 1930)

Ein Graph G ist genau dann planar, wenn er weder eine Unterteilung von K_5 noch eine Unterteilung von $K_{3,3}$ enthält.

Also: Um zu zeigen, dass ein Graph nicht planar ist, muß man entweder einen unterteilten K_5 oder einen unterteilten $K_{3,3}$ entdecken.

Von der Ebene zum Torus

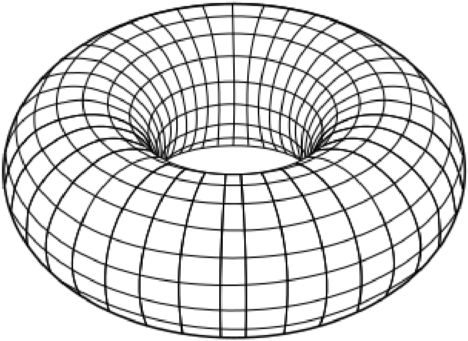
Zeichnungen auf der Kugel

Die Oberfläche einer Kugel verhält sich genau gleich wie die Ebene.

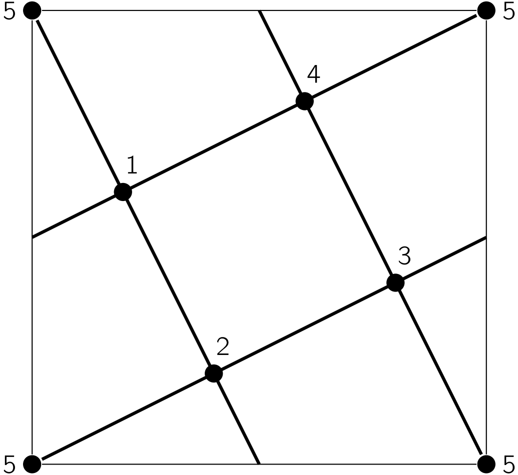
Man kann einen Graphen dann und nur dann kreuzungsfrei auf der Kugeloberfläche zeichnen, wenn man ihn kreuzungsfrei in der Ebene zeichnen kann.

Zeichnungen auf dem Torus (1)

Torus = Autoreifen = Gugelhupf



Zeichnungen auf dem Torus (2)



Zeichnungen auf dem Torus (3)

Der **vollständige** Graph K_n besteht aus n Knoten und hat zwischen jedem Knotenpaar eine Kante.

Übung

(a) Zeige, dass der K_6 auf dem Torus eingebettet werden kann.

(b) Zeige, dass der K_7 auf dem Torus eingebettet werden kann.

Anmerkung:

- Wenn ein Graph $G = (V, E)$ auf dem Torus eingebettet werden kann, dann gilt auf jeden Fall $|E| \leq 3|V|$.
- Daher kann der K_8 nicht auf dem Torus eingebettet werden.