52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innenkurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 16. Oktober 2020

Wenn man eine ganze Zahl a durch den Modul $m \in Z^+$ dividiert, so bleibt eine der Zahlen aus $M = \{0; 1; 2; \ldots; m-1\}$ Rest. Zwei Zahlen, die bei Division durch m denselben Rest haben, nennt man kongruent (symbolisch $a \equiv b \pmod{m}$).

Die Menge der Zahlen, die denselben Rest k (mit $0 \le k < m$) bei Division durch m haben, nennt man die Restklasse $\bar{k}$.

Jede Zahl a, die in der Restklasse $\bar{k}$ liegt, lässt sich in der Form $a = t.m + k$ mit $0 \le k < m$, $t \in Z$ darstellen.

Liegen a und b in derselben Restklasse (also $a \equiv b \pmod{m}$), so gilt $m | a-b$.

Regeln: Gilt $a \equiv b \pmod{m}$ und $c \equiv d \pmod{m}$, so gilt $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$

Gilt $a \equiv b \pmod{m}$ und $c \equiv d \pmod{m}$, so gilt $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$

1.)	Bei der Division 123456789 :4 bleibt welcher Rest?	
2.)	Heuer ist der 24.Dezember ein Donnerstag. Dann ist der 24. Dezember im Jahr (i) 2021 (ii) 2022 (iii) 2023 (iv) 2024 welcher Wochentag?	
3.)	Zur Zahl $a = -218$ wird so lang 7 addiert, bis sich eine Zahl x mit $0 \le x \le 6$ ergibt. Bestimme x.	Ballik: Mathematik-Olympiade
4.)	Welche Einerstelle hat die Zahl $a = 21903^{42}$?	
5.)	Zeige, dass die Zahl $x = 21^{999} + 19^{777}$ durch 20 teilbar ist.	Ballik: Mathematik-Olympiade Z3.17
6.)	Ist $3^{100} - 5$ durch 8 teilbar?	
7.)	Bestimme die Einerstelle von 2013^{123}.	Ballik: Mathematik-Olympiade Z3.26
8.)	Zeige, dass für beliebige ganze Zahlen a, b der Ausdruck a^2+b^2+1 nicht durch 28 teilbar ist.	Ballik: Mathematik-Olympiade Z3.30

9.)	Zeige, dass $5^{93} - 1$ (a) keine Primzahl (b) keine Quadratzahl ist. Hinweis: Suche einen passenden Modul.	
10.)	Bestimme alle positiven ganzen Zahlen n, sodass $7 \mid 2^n - 1$. IMO 1964	Andreescu NumberTheory
11.)	Zeige: $3^{34} - 3^{18} - 3^{16} + 1$ ist durch 323 teilbar	Ballik: Mathematik-Olympiade Z3.53