52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 06. November 2020

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Josef Pech zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 03. November 2020 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Josef Pech bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 06. November 2020 von 16:20–18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1. Seien x, y und z ganze Zahlen. Zeige:
Wenn $x + y^2 = 19^z$ gilt, dann ist 90 kein Teiler von $x^2 + y$.

Aufgabe 2. Für die ganzen Zahlen x und y sei $x + y \neq 0$.
Zeige, dass

$$\frac{x^2y^2 + 1}{3(x + y)}$$

keine ganze Zahl ist

Aufgabe 3. Es gibt keine vier aufeinander folgenden ganzen Zahlen, deren Produkt um 1993 kleiner ist als eine Quadratzahl. Zeige dies.

Aufgabe 4.

a Bestimme die Einerstelle von 3^{100}

b Bestimme die Zehnerstelle von 3^{100}.

Aufgabe 5. Zeige, dass sich

$$\frac{21n + 4}{14n + 3}$$

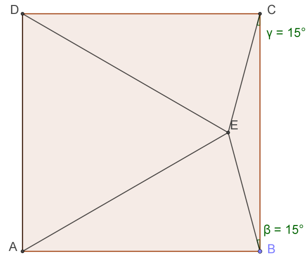
für keine natürliche Zahl n kürzen lässt.

Aufgabe 6. Für welche Primzahlen p und q ist

$$p^q + q^p$$

eine Primzahl?

Aufgabe 7. Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$.



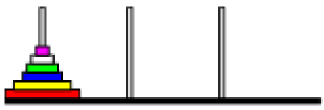
Die Winkel $\angle CBE = 15°$ und $\angle ECB = 15°$ werden eingezeichnet. Der Punkt E befindet sich im Inneren des Quadrats.
Zeige, dass das Dreieck DAE gleichseitig ist.

Aufgabe 8. Gegeben ist die Folge

$$a_n = \langle 3;\ 7;\ 11;\ \ldots\ 4n-1;\ \ldots \rangle.$$

Zeige, dass diese Folge unendliche viele Primzahlen enthält.

Aufgabe 9. Alle n Scheiben sollen von einem Stab auf einen der beiden anderen verfrachtet werden, wobei zu beachten ist:



Bei jedem Schritt darf nur genau eine Scheibe transportiert werden. Dabei darf nie eine größere Scheibe auf einer kleineren zu liegen kommen.
Bestimme die Minimalanzahl a_n von Schritten.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1.

Fall 1. $z = 0$ ist einfach zu erledigen

Fall 2. $z > 0$ unterscheide die linke Seite gerade-ungerade

Aufgabe 2. Betrachte den Zähler $\pmod 3$ und ebenso den Nenner.

Aufgabe 3. Entweder ist einer der Faktoren durch 5 teilbar (1. Fall) oder keiner der Faktoren ist durch 5 teilbar (2.Fall).

Aufgabe 4. Betrachte die gegeben Zahl

(a) Modulo 10

(b) Modulo 25 und modulo 4

Aufgabe 5. Wende die Teilbarkeitsregeln für Zähler Z und Nenner N getrennt an (Zeige, dass $ggT(Z, N) = 1$.)
$t \mid a \Rightarrow t \mid ka$. Aus $t \mid a$ und $t \mid b$ folgt $t \mid a + b$.
Wende diese Regeln so an, dass die Zahl, die von t geteilt wird nicht mehr von n abhängt.

Aufgabe 6. Unterscheide die Fälle

(i) p und q sind größer als 2

(ii) ...

Aufgabe 7. Im Dreieck OEC lässt sich OE bestimmen, allerdings wird der Sinussatz verwendet.

Aufgabe 8. Der Beweis wird indirekt geführt.
Angenommen es kommen nur endlich viele Primzahlen vor. Dann gibt es eine größte p. Konstruiert man die Zahl $4p! - 1$, die in a_n liegt, so zeigt sich, dass sie nur Primzahlen der Form $4k + 1$ enthalten kann. Warum gibt es fast keine Primzahlen der Form $4k + 2$?

Aufgabe 9. Löse die Aufgabe für $n = 1; 2; 3; 4$ und errate die Gesetzmäßigkeit, die sich dann mittels vollständiger Induktion zeigen lässt.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Wir unterscheiden für z die folgenden beiden Fälle:

Fall 1. $z = 0$. Da $x + y^2 = 19^0 = 1$ gilt, können nicht beide Zahlen x und y gerade sein und auch nicht ungerade. Somit ist auch $x^2 + y$ ungerade und 2 kein Teiler davon. Also kann auch 90 kein Teiler von $x^2 + y$ sein.

Fall 2. $z > 0$. Da 19^z ungerade ist, kann man analog zum vorherigen Fall schließen.

Aufgabe 2.

Wir erinnern zunächst an die quadratischen Reste modulo 3:

t	0	1	2
t^2	0	1	1

Tabelle 1: Quadratische Reste $\pmod 3$.

Wenden wir uns nun dem Ausdruck $\frac{x^2y^2+1}{3(x+y)}$ zu.
Der Nenner ist ein Vielfaches von 3 (also $\equiv 0 \pmod 3$).
Im Zähler ist x^2 (bzw. auch y^2) entweder kongruent zu 0 oder zu 1 modulo 3. Ist einer der beiden Quadrate kongruent zu 0 modulo 3, so gilt dies auch für das Produkt x^2y^2, andernfalls ist dieses kongruent zu 1 modulo 3.
Addiert man 1, so gilt nun entweder $x^2 + y^2 + 1 \equiv 1 \pmod 3$ oder $x^2 + y^2 + 1 \equiv 2 \pmod 3$. Somit ist der Ausdruck in keinem Fall durch 3 teibar.

Aufgabe 3.

Sei die kleinste der vier aufeinanderfolgenden Zahlen $x - 1$. Dann betrachten wir die Gleichung

$$(x-1) \cdot x \cdot (x+1) \cdot (x+2) + 1993 = a^2 \tag{1}$$

mit einer passenden ganzen Zahl a und wollen zeigen, dass ein solches a nicht existiert.
Dazu erinnern wir an die quadratischen Reste modulo 5:

t	0	1	2	3	4
t^2	0	1	4	4	1

Tabelle 2: Quadratische Reste $\pmod 5$.

Wir unterscheiden nun die folgenden Fälle:

Fall 1. Einer der Faktoren auf der linken Seite von (1) ist durch 5 teilbar. Dann ist die linke Seite kongruent zu 3 modulo 5 und die rechte laut Tabelle entweder 0, 1 oder 4. Das ist ein Widerspruch.

Fall 2. Keiner der Faktoren ist durch 5 teilbar. Dnn ist die linke Seite kongruent zu $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \equiv 7 \equiv 2 \pmod 5$. Wie im vorigen Fall ist dies ein Widerspruch.

Wir haben also durch einen Widerspruchsbeweis mittels Betrachtung der gegebenen Gleichung modulo 5 gezeigt, dass es keine derartigen vier Zahlen gibt.

Aufgabe 4.

a) Wir betrachten zunächst die Potenzen von 3 bei Division durch 10:

n	0	1	2	3	4	5	6	
3^n	1	3	9	7	1	3	9	usw.

Tabelle 3: Reste der Potenzen von 3 $\pmod{10}$.

Aus der Tabelle entnehmen wir, dass sich in einem Viererrhythmus die Rest 1, 3, 7 und 9 wiederholen. (Man kann auch mittels vollständiger Induktion nachweisen, dass für alle $n \geq 0$ gilt, dass $3^n \equiv 3^{n+4} \pmod{10}$ ist. Als Induktionsbasis benötigt man für jeden der vier Fälle einen Wert, also $n = 1$, 2, 3 bzw. 4.)

Für die Vielfachen von 4 erhält man immer 1, also auch für 100. Die Einerstellen von 3^{100} ist demnach 1.

b) Um diese Teilaufgabe zu lösen betrachten wir den Ausdruck 3^{100} einerseits $\pmod 4$ und andererseits $\pmod{25}$.

Für gerade n ist $3^n \equiv 1 \pmod 4$, denn für $n = 2k$ gilt, dass

$3^n = 3^{2k} = (3^2)^k = 9^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod 4$.

(Dies kann man natürlich alternativ auch durch vollständige Induktion nachweisen).

Für den Modul 25 wäre eine Tabelle der Reste der Potenzen von 3 sehr umfangreich. Deshalb verwenden wir eine andere Idee:

Es gilt

$3^{99} = (3^3)^{33} \equiv 2^{33} \equiv 2^{30} \cdot 2^3 \equiv (2^5)^6 \cdot 8 \equiv 7^6 \cdot 8 \equiv (7^2)^3 \cdot 8 \equiv (-1)^3 \cdot 8 \equiv 17 \pmod{25}$.

Daraus folgt, dass $3^{100} = 3^{99} \cdot 3 \equiv 17 \cdot 3 \equiv 51 \equiv 1 \pmod{25}$ ist.

Da die beiden Zahlen 4 und 25 teilerfremd sind, können wir den Rest des Ausdrucks bei Division durch 100 bestimmen, indem wir die beiden Reste miteinander multiplizieren.

Es gilt also $3^{100} \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1 \pmod{100}$.

Die Lösung ist also 1 (d.h. 01) und die Zehnerziffer ist folglich 0.

Aufgabe 5.

Sei t ein gemeinsamer Teiler des Zählers und des Nenners.

Wir verwenden zunächst die Teilerregel
$t \mid a \Rightarrow t \mid ka$,
und stellen fest, da t den Zäler teilt, dass wegen $t \mid 21n + 4$ auch $t \mid 2 \cdot (21n + 4) = 42n + 8$ gilt.
Da t auch den Nenner teilt, folgt aus $t \mid 14n + 3$, dass $t \mid 3 \cdot (14n + 3) = 42n + 9$.
Wir wenden nun die folgende Teilerregel an:
Aus $t \mid a$ und $t \mid b$ folgt $t \mid a + b$
Es gilt also, dass $t \mid ((42n + 9) - (42n + 8)) = 1$, also $t \mid 1$. Daraus folgt unmittelbar, dass der Zähler und der Nenner relativ prim (d.h. teilerfremd) sind.

Aufgabe 6.

Sei o.E. $p < q$. Wir unterscheiden die beiden folgenden Fälle:

Fall 1. $2 < p < q$. Da nun p und q beide ungerade sind, ist die linke Seite der Gleichung gerade (und größer als 2). Dieser Fall gibt keine Lösung.

Fall 2. $2 = p$. Da die Summe jedenfalls eine ungerade Zahl sein muss, gilt $q > 2$ und insbesonder q ungerade.

Wir betrachten den Ausdruck $2^q + q^2$ modulo 3.

$q = 3$: Dies führt auf $2^3 + 3^2 = 17$. Dies ist eine Lösung.

$q > 3$: Wir wissen, dass q nicht durch 3 teilbar ist und deshalb $q^2 \equiv 1 \pmod 3$ ist (Stichwort: quadratische Reste modulo 3).
$2^q + q^2 \equiv (-1)^q + 1 \equiv (-1) + 1 \equiv 0 \pmod 3$.
Da $2^q + q^2 > 3$ kann der Ausdruck nicht prim sein.

Zusammenfassend erhalten wir für (p, q) die beiden Lösungspaare $(2, 3)$ und $(3, 2)$.

Aufgabe 7.

Aufgrund der symmetrischen Konstruktion gilt jedenfalls $DE = AE$, das Dreieck DAE ist demnach zumindest gleichschenkelig. Sei H der Halbierungpunkt der Seite AD. Wenn wir die Länge HE bestimmen können, und diese der Höhe eines gleichseitigen Dreiecks entspricht, dann sind wir fertig.
Sei o.E. $AB = 1$.
Sei O der Schnittpunkt der beiden Diagonalen des Quadrats $ABCD$. Im Dreieck OEC kennen wir alle Winkel ($\angle EOC = 45°$, $\angle OCE = 45° - 15° = 30°$ und somit $\angle CEO = 180° - (\angle EOC + \angle OCE) =^0 5°$). Da O der Mittelpunkt der Diagonale AC ist, gilt $OC = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und dadurch ist das Dreieck nach WSW-Satz eindeutig bestimmt.
Wir wollen nun die übrigen Seiten des Dreiecks berechnen. Nach Sinussatz gilt

$$\frac{OE}{OC} = \frac{\sin 30°}{\sin 105°}.$$

Um OE zu bestimmen, benötigen wir demnach neben $\sin 30° = \frac{1}{2}$ auch den Wert von $\sin 150°$. Dafür schreiben wir 105° als $60° + 45°$ und verwenden die Summenformel für die Sinus-Funktion:

$$\sin \alpha + \beta = \sin \alpha \cdot \sin \beta + \cos \alpha \cdot \cos \beta.$$

Setzen wir $\alpha = 60°$ und $\beta = 45°$ ein, so erhalten wir

$$\sin 105 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} + 1)}{4}.$$

Wir können nun OE bestimmen:

$$\frac{OE}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{OE}{OC} = \frac{\sin 30°}{\sin 105°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)}{4}}$$

$$\Leftrightarrow OE = \frac{2}{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}+1)} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{1}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}^2-1^2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Unser Ziel ist es, HE zu bestimmen. Da $HE = HO + OE$ gilt $HE = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Da $\frac{\sqrt{3}}{2}$ die Höhe im gleichseitigen Dreieck mit Setenlänge 1 ist, ist der Beweis fertig.

Aufgabe 8.

Wir beweisen die Aussage indirekt. Sei p die größte in a_n vorkommende Primzahl.
Wir bilden die Zahl $x = 4p! - 1$, die natürlich ein Element der Folge a_n ist.
Außerdem ist x zu allen Primzahlen, die kleiner oder gleich p sind relativ prim. Die Zahl x kann keine Primteiler der Form $4k-1$ besitzen. Also sind alle Primfaktoren von x von der Gestalt $4k+1$. Bldet man das Produkt von $4k+1$ mit $4l+1$, so erhält man wieder eine Zahl der Form $4m+1$. Daraus folgt, dass x prim ist. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung und die Folge enthält unendlich viele Primzahlen.

Aufgabe 9.

Wir probieren für kleine Werte von n und erhalten dadurch die folgenden Werte für die Minimalzahl a_n an Schritten:

n	1	2	3
a_n	1	3	7

Tabelle 4: Quadratische Reste $\pmod 3$.

Folgende Idee – die mittels vollständiger Induktion formalisiert werden kann – hilft uns, von n auf $n+1$ zu schließen:
Man transportiert zuerst die ersten n Scheiben (mit a_n Operationen) auf einen der beiden anderen Türme. Dann wird die Scheibe $n+1$ auf den 3. Turm gesetzt und anschließend werden die n Scheiben auf due Scheibe $(n+1)$ zurücktransportiert. Dies ergibt insgesamt $2a_n + 1$ Operationen. Diese Anzahl ist minimal, da das zweimalige Transportieren der n Scheiben nötig ist und jeweils mindestens a_n Schritte benötigt.
Also

$$a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad \text{mit } a_1 = 1.$$

Diese rekursive Darstellung der Folge lässt sich leicht explizieren:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n + 1 = 2\cdot(2a_{n-1}+1) + 1 = 2^2 a_{n-1} + (1+2) = \\ &= 2^2(2a_{n-2}+1) + (1+2) = 2^3 a_{n-2} + (1+2+2^2) = \ldots = \\ &= 2^n a_{n-(n-1)} + (1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}) = \\ &\overset{\text{geom. Reihe}}{=} 2^n a_1 + (2^n - 1) \overset{a_1=1}{=} 2^n + 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1. \end{aligned}$$

Somit ist

$$a_n = 2^n - 1.$$

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

Landeswettbewerb für Anfänger*innen 1990 (nachzulesen in [4])

Aufgabe 2.

aus [3]

Aufgabe 3.

Landeswettbewerb für Anfänger*innen 1993 (nachzulesen in [4])

Aufgabe 4.

von Josef Pech

Aufgabe 5.

[1, 1. IMO (1959)]

Aufgabe 6.

aus [3]

Aufgabe 7.

aus [5], übersetzt von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 8.

aus [2], übersetzt von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 9.

Folklore, siehe z.B. Wikipedia-Eintrag zu Türme von Hanoi.

Literatur

[1] Internationale Mathematik-Olympiade. `https://www.imo-official.org/problems.aspx`. Alle IMO - Angaben und die meisten IMO-Shortlists vergangener Jahre (aufgerufen am 10.11.2020).

[2] Titu Andreescu. *Mathematical Olympiad Treasures.* Birkhäuser, 2006.

[3] Tom Ballik. *Mathematik-Olympiade (für Anfänger).* ikon VerlagsGesmbH, 2012.

[4] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 1990–1999: Aufgaben und Lösungen.* öbv, 1999.

[5] Loren C Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer Science & Business Media, 2012.