52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 20. November 2020

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Josef Pech zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 17. November 2020 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Josef Pech bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 20. November 2020 von 16:20–18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1. Löse in den reellen Zahlen:

$$|10 - 7x| = 3 \cdot |3x - 2|.$$

Aufgabe 2. Löse in den reellen Zahlen:

$$4 \cdot \lfloor x \rfloor - 3x - 2 = 0.$$

Hinweis: Unter $\lfloor x \rfloor$ (sprich: „Gaußklammer von x“) verstehen wir die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

Aufgabe 3. Löse

$$x^{28} = x^{3x+1}$$

in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 4. Für welche nicht-negativen ganzen Zahlen C hat die Gleichung $2x^2 + 4x + C = 0$ mindestens eine reelle Lösung?

Aufgabe 5. Sei a eine reelle Zahl.
Für welche Werte von a hat die Gleichung $x^2 - 4ax + a - 3 = 0$ zwei reelle Lösungen, deren Summe das Doppelte ihres Produkts ist?

Aufgabe 6. Zeige: Wenn für ganze Zahlen a, b, c und d die Gleichung

$$7a + 8b = 14c + 28d$$

gilt, so ist $a \cdot b$ durch 14 teilbar.

Aufgabe 7. Löse in den reellen Zahlen

$$(x - 4) \cdot (x^2 - 8x + 14)^2 = (x - 4)^3.$$

Aufgabe 8. Zeige: Es gibt keine positiven ganzen Zahlen a und b mit

$$4a(a + 1) = b(b + 3).$$

Aufgabe 9. Löse in den reellen Zahlen

$$x^2 - 4xy + 5y^2 - 2y + 1 = 0.$$

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Entweder: Fallunterscheidung

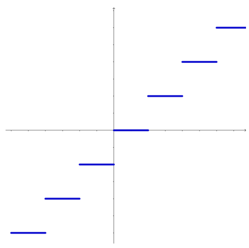
Fall 1. $x < \frac{2}{3}$

Fall 2. $\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{10}{7}$

Fall 3. $x > \frac{10}{7}$ Seite gerade-ungerade

Oder: Quadrieren.

Aufgabe 2.



Setze $\lfloor x \rfloor =: n$ und $x = n + \varepsilon$ mit $0 \leq \varepsilon < 1$. Dies liefert eine Gleichung in ε und n.
Drücke diese Gleichung in ε aus und nutze aus, dass der entsprechende Term im Intervall $[0;\, 1)$ liegt.

Aufgabe 3. Für x unterscheide zwischen $x = 0$ und $x \neq 0$.
Für welche Zahlen a und b kann $a^b = 1$ sein?
(Beachte auch den Fall, dass b gerade ist.)

Aufgabe 4. Diskriminante $D \geq 0$.

Aufgabe 5. Verwende den Satz von Vieta (für quadratische Gleichungen):

Satz (Satz von Vieta (für quadratische Gleichungen))**.** Für die Lösungen x_1 und x_2 der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ gelten die beiden Gleichungen

$$x_1 \cdot x_2 = q \quad \text{und} \quad x_1 + x_2 = -p.$$

Die gegebene Gleichung lautet also $x_1 + x_2 = 2 \cdot x_1 \cdot x_2$.

Aufgabe 6. Betrachte die Gleichung unter dem Modul $m = 7$ bzw. $m = 2$.

Aufgabe 7. Achtung: Vor dem Kürzen muss erst sichergestellt sein (mittels Fallunterscheidung), dass nicht durch 0 gekürzt wird.
Verwende anschließend $A^2 - B^2 = 0 \Leftrightarrow (A - B) \cdot (A + B) = 0$.

Aufgabe 8. Die linke Seite lässt sich leicht (mit geeigneter Äquivalenzumformung) zu einem vollständigen Quadrat ergänzen. Dann liegt die rechte Seite zwischen zwei vollständigen Quadraten.

Aufgabe 9. Fehlt den beiden ersten Summanden etwas zu einem vollständigen Quadrat?
Nutze: Aus $A^2 + B^2 = 0$ folgt $A = 0$ und $B = 0$.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Wir führen eine Fallunterscheidung durch.

Fall 1. $x < \frac{2}{3}$
In diesem Intervall sind beide Ausdrücke in den Beträgen negativ (und für eine Zahl $y < 0$ gilt $|y| = -y$.) Wir betrachten also die äquivalente Gleichung

$$-(10 - 7x) = 3 \cdot (-(3x - 2)),$$

formen diese nach x um und erhalten $x = \frac{-}{2}$.

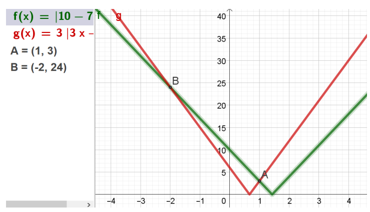
Fall 2. $\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{10}{7}$
Für eine nicht-negative Zahl y gilt $|y| = y$. Die Gleichung ist demnach äquivalent zu

$$-(10 - 7x) = 3 \cdot (3x - 2),$$

bzw. zu $x = 1$.

Fall 3. $x > \frac{10}{7}$
Umformen der Gleichung $10 - 7x = 3 \cdot (3x - 2)$ führt auf $x = -2$.

Alternativ kann der Beweis auch graphisch geführt werden, indem wir die Schnittpunkte der beiden Funktionsgraphen $f(x) = |10 - 7x|$ und $g(x) = 3 \cdot |3x - 2|$ bestimmen.



Aufgabe 2.

Sei $x = n + \varepsilon$ mit $\lfloor x \rfloor = n \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq \varepsilon < 1$.
Die Gleichung lautet in dieser Notation

$$4n - 3(n + \varepsilon) - 2 = 0.$$

Wir formen diese nach ε um:

$$\varepsilon = \frac{n-2}{3}.$$

Die Bedingung $0 \leq \varepsilon < 1$ bzw. $0 \leq \frac{n-2}{3} < 1$ führt auf $2 \leq n < 5$, also $n \in \{2, 3\,4\}$ und folglich $\varepsilon \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$. Setzen wir diese Werte jeweils passend paarweise zusammen, so erhalten wir $\mathbb{L} = \{2, \frac{10}{3}, \frac{14}{3}\}$.

Aufgabe 3.

Für $x = 0$ ist jedenfalls Gleichheit erfüllt. Für $x \neq 0$ dürfen wir beide Seiten der Gleichung durch x^{28} dividieren und erhalten

$$1 = \frac{x^{3x+1}}{x^{28}} = x^{3x-27}.$$

Um keine Lösungen zu übersehen, wenden wir uns nun zunächst einer allgemeinen Potenzgleichung der Form $a^b = 1$ zu und untersuchen, wann diese erfüllt ist.
Klarerweise gilt $a^b = 1$ falls $a = 1$ gilt. In diesem Fall ist b beliebig.
Weiters gilt $a^b = 1$, falls $a = (-1)$ ist und b gerade ist.
Außerdem gilt $a^b = 1$, falls $b = 0$ gilt und $a > 0$ ist.
Die Gleichung $1 = x^{3x-27}$ ist demnach erfüllt, falls $x = 1$ ist, $x = -1$ ist (denn dann ist $3x - 27 = -30$, also gerade) bzw., falls $3x - 27 = 0 \Leftrightarrow x = 9$ ist.
Folglich ist die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-1, 1, 9\}$.

Aufgabe 4.

Wir wenden die große quadratische Lösungsformel mit $a = 2$, $b = 4$ und $c = C$ an und erhalten

$$x_{1,\,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16 - 8C}}{2}.$$

Damit die Gleichung mindestens eine reelle Lösung hat, muss die Diskriminante (d.h. der Wert unter der Wurzel) nicht-negativ sein.
Also gilt $16 - 8C \geq 0 \Leftrightarrow C \leq 2$.
Wir erhalten $C \in \{0, 1, 2\}$.

Aufgabe 5.

Wir verwenden den Satz von Vieta für quadratische Gleichungen:

Satz (Satz von Vieta (für quadratische Gleichungen))**.** Für die Lösungen x_1 und x_2 der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ gelten die beiden Gleichungen

$$x_1 \cdot x_2 = q \quad \text{und} \quad x_1 + x_2 = -p.$$

In unserem Fall gilt $p = -4a$ und $q = a - 3$. Gesucht sind jene Zahlen a, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 = 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \\ \Leftrightarrow &4a = 2 \cdot (a - 3) \\ \Leftrightarrow &a = -3. \end{aligned}$$

Die einzige Lösung ist somit $a = -3$.

Aufgabe 6.

Wir betrachten die Gleichung $7a + 8b = 14c + 28d$ modulo 7:

$$7a + 8b = 14c + 28d \equiv 0 + 8b \equiv 0 + 0 \pmod 7.$$

Da die beiden Zahlen 8 und 7 relativ prim (d.h. zueinander teilerfremd) sind, muss $b \equiv 0 \pmod 7$ gelten.
Wir betrachten die Parität der Ausdrücke (d.h. die Ausdrücke modulo 2). Die rechte Seite der Gleichung ist jedenfalls gerade, da $14c + 28d = 2 \cdot (7c + 14d)$ gilt. Da $8b = 2 \cdot 4b$ ebenfalls gerade ist, muss dies auch für $7a$ gelten. Deshalb ist a eine gerade Zahl.
Aus $7|b$ und $2|a$ folgt $14|a \cdot b$.

Aufgabe 7.

Für $x_1 = 4$ sind beide Seiten der Gleichung 0, also ist dies eine Lösung.
Für $x \neq 4$ dürfen wir beide Seiten durch $x - 4$ dividieren und erhalten

$$(x^2 - 8x + 14)^2 = (x - 4)^2 \Leftrightarrow (x^2 - 8x + 14)^2 - (x - 4)^2 = 0$$

Wir wenden die dritte binomische Formel, $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$, an:

$$[(x^2 - 8x + 14) - (x - 4)] \cdot [(x^2 - 8x + 14) + (x + 4)] = 0.$$

Nach dem Produkt-Null-Satz ist dieser Ausdruck genau dann 0, wenn einer der beiden Faktoren (in den eckigen Klammern) Null ist.

Fall 1. $(x^2 - 8x + 14) - (x - 4) = 0$ führt mittels quadratischer Lösungsformel auf $x_2 = 6$ und $x_3 = 3$.

Fall 2. $(x^2 - 8x + 14) + (x + 4) = 0$ führt mittels quadratischer Lösungsformel auf $x_4 = 5$ und $x_5 = 2$.

Die Lösungsmenge ist also $\mathbb{L} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Aufgabe 8.

Wir formen die Gleichung äquivalent um:

$$\begin{aligned} 4a^2 + 4a &= b^2 + 3b && \mid +1 \\ 4a^2 + 4a + 1 &= b^2 + 3b + 1 \end{aligned}$$

Der Ausdruck auf der linken Seite ist ein vollständiges Quadrat, da $4a^2 + 4a + 1 = (2a + 1)$ gilt. Da $(b + 1)^2 = b^2 + 2b + 1 < b^2 + 3b + 1 < b^2 + 4b + 4 = (b + 2)^2$, liegt die rechte Seite echt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadraten. Der Ausdruck $b^2 + 3b + 1$ kann selbst also kein Quadrat sein.

Aufgabe 9.

Die Gleichung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} &x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 - 2y + 1 = 0 \\ &(x - 2y)^2 + (y - 1)^2 = 0. \end{aligned}$$

Damit Gleichheit erfüllt ist, muss jeder der beiden Klammerausdrücke gleichzeitig 0 sein, also $x = 2y$ und $y = 1$. Folglich gilt $x = 2$ und wir erhalten $\mathbb{L} = \{(2, 1)\}$.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.

von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.

aus [1], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team.

Aufgabe 4.

Aufgabe 5.

[1, Gl. 4.14], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 6.

[3, LWA 2012, (Walther Janous)],bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 7.

aus [2, JRW 2003, (Gerd Baron)], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 8.

aus [2, LWA, 2005], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 9.

von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team.

Literatur

[1] Tom Ballik. *Mathematik-Olympiade (für Anfänger).* ikon VerlagsGesmbH, 2012.

[2] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2000–2008: Aufgaben und Lösungen.* Nova MD, 2018. Auflage 1.3.

[3] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2009–2018: Aufgaben und Lösungen.* Nova MD, 2019.