52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 27. November 2020

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Karl Czakler zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 24. November 2020 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Karl Czakler bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 27. November 2020 von 16:20-18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

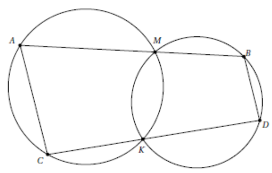
Aufgabe 1. Spiegelt man den Höhenschnittpunkt eines Dreiecks an den Seiten, so liegen die gespiegelten Punkte auf dem Umkreis.

Aufgabe 2. Außerhalb des Quadrates $ABCD$ konstruieren wir über der Seite CD ein rechtwinkeliges Dreieck DCM mit dem rechten Winkel in M.
Zeige, dass die Winkelsymmetrale in M das Quadrat in zwei kongruente Teile teilt.

Aufgabe 3. In einem spitzwinkligen Dreieck ABC sei O der Umkreismittelpunkt und AH eine Höhe. Zeige, dass die Winkel $\angle BAH$ und $\angle CAO$ gleich groß sind.

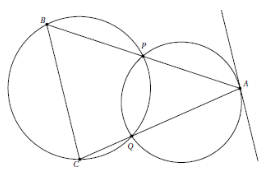
Aufgabe 4. Zwei Kreise schneiden sich in den Punkten M und K.

Die Geraden AB und CD gehen durch M beziehungsweise K und schneiden den einen Kreis in den Punkten A und C, den anderen in B und D. Zeige, dass AC parallel zu BD ist.



Aufgabe 5. Zwei Kreise schneiden sich in den Punkten P und Q.

Durch einen Punkt A auf dem ersten Kreis werden die Geraden AP und AQ gezeichnet. Sie schneiden den zweiten Kreis in den Punkten B und C. Zeige, dass die Tangente an den ersten Kreis im Punkt A parallel zu der Geraden BC ist.



Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Berechne die Winkel zwischen zwei Höhen und verwende den Peripheriewinkelsatz!

Aufgabe 2: Überlege, wann eine Gerade ein Quadrat in zwei kongruente Teile zerlegt

Aufgabe 3: Berechne zunächst den Winkel zwischen der Höhe durch A und der Seite AB, dann überlege wie man den Umkreismittelpunkt O ins Spiel bringen kann.

Aufgabe 4: Zwei Geraden sind zueinander parallel, wenn beide denselben Winkel mit ein anderen Geraden einschließen.

Aufgabe 5: Winkeljagd

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Wir bezeichnen die Winkel des Dreiecks in gewohnter Weise mit α, β und γ und die Höhenfußpunkte mit H_a, H_b und H_c. (Dabei ist H_a der Fußpunkt der Höhe h_a durch A, usw.) Da die Höhe h_c normal auf AB und h_b normal auf AC steht, gilt

$$\angle H_bHC = \angle BHH_c = \alpha$$

und analog

$$\angle H_cHA = \angle H_aHC = \beta$$

$$\angle AHH_b = \angle H_aHB = \gamma.$$

Daher gilt

$$\angle BHA = \alpha + \beta = 180^\circ - \gamma.$$

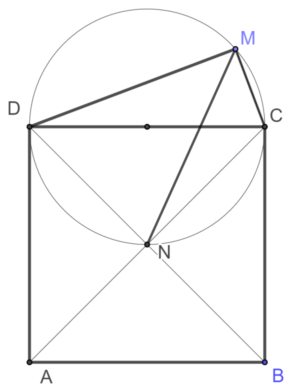
Sei nun H_1 der an der Seite AB gespiegelte Punkt H. Dann gilt klarerweise

$$\angle AH_1B = \angle BHA = 180^\circ - \gamma.$$

Im Viereck AH_1BC ergänzen sich daher gegenüberliegende Winkel auf 180°, sie liegen also auf einem Kreis. Da dieser Kreis duch die Punkte A, B und C geht ist es der Umkreis des Dreiecks ABC. Analog zeigt man das auch für die beiden anderen gespiegelten Punkte.

Aufgabe 2.

Es sei N der Mittelpunkt des Quadrates. Eine Gerade teilt genau dann ein Quadrat in zwei kongruente Teile, wenn sie durch den Mittelpunkt N des Quadrates geht. Wir müssen daher nur sicherstellen, dass die Winkelsymmetrale in M durch N geht. Die Punkte D, M, C und N liegen



auf einen Kreis, da $\angle DMC = \angle CND = 90^\circ$, also die Summe gegenüberliegender Winkel in diesem Viereck gleich 180° ist. (Man hätte auch mit dem Satz von Thales argumentieren können.) Mit dem Peripheriewinkelsatz über der Sehne NC folgt

$$45^\circ = \angle CDN = \angle CMN$$

Daher halbiert MN den Winkel $\angle CMD$ und alles ist gezeigt.

Aufgabe 3.

Das Dreieck ABH ist rechtwinkelig, daher sind die Winkel $\angle HBA = \beta$ und $\angle BAH$ komplementär. Es gilt daher:

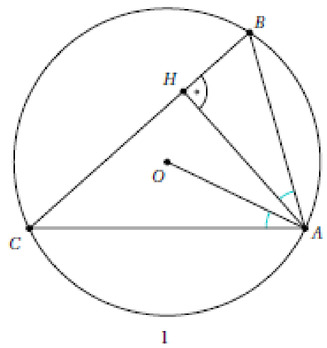
$$\angle BAH = 90° - \beta.$$

Mit dem Peripheriewinkelsatz gilt

$$\angle AOC = 2 \cdot \beta.$$

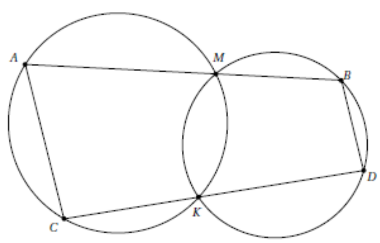
Da das Dreieck AOC gleichschenkelig ist, sind die Basiswinkel gleich groß. Ihre Summe beträgt $180° - 2\beta$ und daraus folgt sofort

$$\angle CAO = \angle OCA = 90° - \beta.$$



Aufgabe 4.

Zwei Geraden sind zueinander parallel, wenn beide denselben Winkel mit ein anderen Geraden einschließen.
Um das zu zeigen, verwenden wir nun zweimal den Satz, dass sich in einem Sehenviereck gegenüberliegende Winkel auf 180° ergänzen. Das Viereck $KDBM$ ist ein Sehnenviereck, daher gilt



$$\angle BMK = 180° - \angle KDB.$$

Daraus folgt $\angle KMA = 180^\circ - \angle BMK = \angle KDB$. Da das Viereck $KMAC$ ebenfalls ein Sehnenviereck ist folgt

$$\angle ACK = 180^\circ - \angle KMA = 180^\circ - \angle KDB.$$

Die Winkel der Strecken AC und BD zur Geraden CD sind daher supplementär, d.h. die Strecken AC und CD sind zueinander parallel.
Bemerkung: Auf die Diskussion verschiedener Konfigurationen wir hier nicht eingegangen.

Aufgabe 5.

Das Viereck $BCQP$ ist ein Sehnenviereck, daher gilt

$$\angle PQC = 180^\circ - \angle CBP.$$

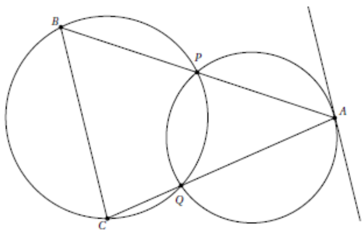
Daher gilt

$$\angle AQP = 180^\circ - \angle PQC = \angle CBP.$$

Es sei X ein beliebiger Punkt auf der Tangente. Mit dem Peripheriewinkelsatz (Sehnen -Tangentenwinkel = Peripheriewinkel) folgt dann

$$\angle XAP = \angle AQP = \angle CBP.$$

Daher schließt die Tangente denselben Winkel mit der Geraden AB ein, wie die Strecke BC.



Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

Geometrie Skriptum Oemo

Aufgabe 2.

aus [1], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 3.

aus [2], übersetzt von Ivan Izmestiev im Rahmen eines Vortrags beim Kursleiter*innen-Seminar Mariazell 2020, bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 4.

aus [2], übersetzt von Ivan Izmestiev im Rahmen eines Vortrags beim Kursleiter*innen-Seminar Mariazell 2020, bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 5.

aus [2], übersetzt von Ivan Izmestiev im Rahmen eines Vortrags beim Kursleiter*innen-Seminar Mariazell 2020, bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Literatur

[1] Tom Ballik. *Mathematik-Olympiade (für Anfänger)*. ikon VerlagsGesmbH, 2012.

[2] Viktor Vasil'evič Prasolov. *Zadači po planimetrii*. Nauka, 1986. Planimetrische Aufgaben, (Auf Russisch).