52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 4. Dezember 2020

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Josef Pech zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 1. Dezember 2020 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Josef Pech bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 4. Dezember 2020 von 16:20–18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1. Löse in den ganzen Zahlen:

$$x^2 - 4x + y^2 - 2y = 0.$$

Aufgabe 2. Sei $p > 3$ eine Primzahl.
Zeige, dass der Ausdruck

$$T = ab^p - ba^p$$

durch 6 teilbar ist.

Aufgabe 3. Der **Satz von Fermat** für Primzahlen p lautet:

Satz (Kleiner Satz von Fermat)**.** Für beliebige Primzahlen a gilt

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

Wenn $\operatorname{ggt}(a, p) = 1$, dann gilt

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

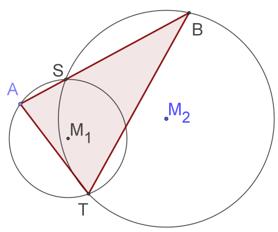
Zeige:

$$323 \mid \left(3^{34} - 3^{18} - 3^{16} + 1\right).$$

Aufgabe 4. Zeige, dass der Ausdruck T von Aufgabe 2 sogar durch $6p$ teilbar ist.

Aufgabe 5. Seien S und T die beiden Schnittpunkte der Kreise k_1 und k_2.

Der Punkt A liegt auf k_1, und B so auf k_2, dass A, S und B auf einer Geraden liegen (dabei liegen A bzw. B auf verschiedenen Seiten der Geraden durch S und T.)



Zeige, dass alle möglichen Dreiecke ABT zueinander ähnlich sind.

Aufgabe 6. Löse in den ganzen Zahlen:

$$x^2 - y^2 - 6x - 2y + 5 = 0.$$

Aufgabe 7. Zeige, dass für beliebige positive ganze Zahlen a, b, c und d die Zahl

$$a^{4b+d} - a^{4c+d}$$

durch 30 teilbar ist.

Aufgabe 8. $ABCD$ sei ein konvexes Viereck. Die Parallele zu BC durch A wird von BD in F geschnitten. Die Parallele zu AD durch B wird von AC in E geschnitten.
Zeige, dass EF parallel zu CD ist.

Aufgabe 9. $ABCD$ sei ein Rechteck. $AEFG$ ist ein Rechteck derart, dass E und G auf der Geraden durch B und D liegen.
Zeige, dass $GBCF$ ein Trapez ist.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Bring auf die Form $A^2 + B^2 = \ldots$

Aufgabe 2. Aus $6|n$ folgt ($2|n$ und $3|n$). Betrachte T sowohl modulo 2 als auch modulo 3.

Aufgabe 3. Es gilt $323 = 17 \cdot 19$. Untersuche die Potenzen von 3 (also 3^1, 3^2, 3^3, usw.) sowohl modulo 17 als auch modulo 19.

Aufgabe 4. Hier ist der kleine Satz von Fermat anzuwenden.

Aufgabe 5. Peripheriewinkelsatz anwenden!

Aufgabe 6. Es gilt: Aus $A^2 - B^2 = C$ folgt $(A - B) \cdot (A + B) = C$ und die Zerlegungen für C lassen sich leicht bestimmen.

Aufgabe 7. Es gilt $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.
Untersuche also den Ausdruck unter dem Gesichtspunkt dieser drei Moduln.

Aufgabe 8. Strahlensatz

Aufgabe 9. Hier findet man kongruente Dreiecke ODER man betrachtet die Flächeninhalte passender Dreiecke

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Wir ergänzen auf vollständige Quadrate:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 - 2y = 0 \\ &\iff (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) = 4 + 1 \\ &\iff (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5 \end{aligned}$$

Die Summe zweier Quadrate ist nur dann 5, wenn das eine Quadrat 4 ist und das andere 1. Darum muss eine der Klammern gleich ± 2 und die andere gleich ± 1 sein.
Wir müssen also die folgenden acht Fälle betrachten

$x-2$	$y-1$	x	y
1	2	3	3
1	-2	3	-1
-1	2	1	3
-1	-2	1	-1
2	1	4	2
2	-1	4	0
-2	1	0	2
-2	-1	0	0

Die Lösungsmenge ist demnach $\mathbb{L} = \{(3,\,3),\,(3,\,-1),(1,\,3),\,(1,\,-1),\,(4,\,2),\,(4,\,0),\,(0,\,2),\,(0,\,0),\}$.

Aufgabe 2.

Wenn eine der beiden Zahlen (oder beide) gerade ist (sind), so gilt dies auch für T. Wenn beide ungerade sind, so ist die Differenz zweier ungerader Zahlen wieder gerade. Damit ist T in jedem Fall durch 2 teilbar.
Wir betrachten die Teilbarkeit durch 3: $T = ab(b^{p-1} - a^{p-1})$. Wenn eine der beiden Zahlen a, b durch 3 teilbar ist, so auch T.
Ist das nicht der Fall, dann gilt für $a \equiv \pm 1 \pmod 3$ und ebenfalls $b \equiv \pm 1 \pmod 3$. Der Exponent $p-1$ ist gerade und folglich ist $b^{p-1} \equiv a^{p-1} \equiv 1 \pmod 3$. Die Differenz ist also kongruent 0 modulo 3. Also ist T durch 3 teilbar.

Aufgabe 3.

Wir heben heraus und faktorisieren:

$$\begin{aligned} 3^{34} - 3^{18} - 3^{16} + 1 &= (3^{34} - 3^{16} - (3^{18} - 1) \\ =&3^{16} \cdot (3^{18} - 1) - (3^{18} - 1) = (3^{18} - 1) \cdot (3^{16} - 1). \end{aligned}$$

Da $323 = 17 \cdot 19$ müssen wir Teilbarkeit durch diese beiden Primzahlen nachweisen.
Der erste Faktor ist nach kleinem Fermat durch 19 teilbar, da $3^{18} = 3^{19-1} \equiv 1 \pmod{19}$ ist.
Der zweite Faktor ist nach gleichem Argument durch 17 teilbar, denn nach kleinem Fermat gilt $3^{16} = 3^{17-1} \equiv 1 \pmod{17}$.

Da der erst Fakrot durch 19 und der zweite Faktor durch 17 teilbar ist, ist das Produkt, wie behauptet, durch 323 teilbar.

Aufgabe 4.

Wir haben in Aufgabe 2 bereits nachgewiesen, dass T durch 6 teilbar ist. Da $\text{ggt}(6, p) = 1$ ist, müssen wir nun nur mehr nachweisen, dass $p|T$ gilt.
Nach kleinem Satz von Fermat gilt

$$b^p \equiv b \pmod p \quad \text{und} \quad a^p \equiv a \pmod p.$$

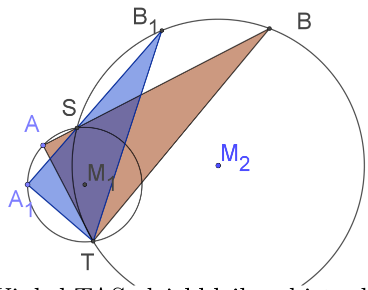
Somit ist

$$T = a \cdot b^p + b \cdot a^p \equiv ab - ba \equiv 0 \pmod p$$

und das ist gleichbedeutend damit, dass p ein Teiler von T ist.

Aufgabe 5.

Wir betrachten folgendes Beispiel mit Punkten A, B, A_1 und B_1.



In nebenstehender Zeichnung gilt nach Peripheriewinkelsatz, dass

$$\angle TB_1S = TBS \quad \text{PW über Sehne TS}$$

und

$$\angle TA_1S = TAS \quad \text{PW über Sehne TS.}$$

Allgemein gilt, dass nach dem Peripheriewinkelsatz der Winkel TAS gleichbleibend ist, gleichgültig, wo auch immer A auf dem Bogen liegt und ebenso der Winkel TBS, da die Sehne TS fix ist. Darum sind alle möglichen Dreiecke ABT zueinander ähnlich.

Aufgabe 6.

Wir formen die gegebene Gleichung durch Ergänzen auf vollständige Quadrate um:

$$\begin{aligned}
& x^2 - y^2 - 6x - 2y + 5 = 0 \\
\iff & (x^2 - 6x + 9) - (y^2 + 2y + 1) + 5 = 0 + 9 - 1 \\
\iff & (x-3)^2 + (y+1)^2 = 3 \\
\iff & (x - 3 + y + 1) \cdot (x - 3 - y - 1) = 3.
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir dabei die dritte binomische Formel, $A^2 - B^2 = (A + B) \cdot (A - B)$, verwendet.
Das Produkt zweier ganzer Zahlen ist genau dann 3, wenn eine der beiden Zahlen 1 und die andere gleich 3 ist, oder wenn die eine Zahl -1 und die andere gleich -3 ist.
Das ergibt also die folgenden vier Fälle, die in nachstehender Tabelle aufgelistet und bereits nach x und y aufgelöst sind:

$x+y-2$	$x-y-4$	x	y
1	3	5	-2
3	1	5	0
-1	-3	1	0
-3	-1	1	-2

Die Lösungsmenge ist demnach $\mathbb{L} = \{(5,\,-2),\,(5,\,0),\,(1,\,0),\,(1,\,-2)\}$.

Aufgabe 7.

Wir können den Term umformen zu $a^d(a^{4b} - a^{4c})$.
Wir betrachten diesen Term auf Teilbarkeit durch 2, 3 bzw. 5.
Teilbarkeit durch 2:
Wenn a gerade ist, so ist der erste Faktor gerade.
Wenn a ungerade ist, so sind a^{4b} und a^{4c} beide ebenfalls ungerade und deren Differenz gerade. Also ist der Term gerade, d.h. durch 2 teilbar.
Teilbarkeit durch 3:
Die folgende Tabelle zeigt die Kongruenzklassen modulo 3: Ist a durch 3 teilbar, so ist der Term

a	a^4
0	0
1	1
2	1

Einträge der Tabelle sind modulo 3

jedenfalls durch 3 teilbar.
Ist a nicht durch 3 teilbar, so ist $a^{4b} = (a^4)^b \equiv 1^b = 1 \pmod 3$, und analog $a^{4c} \equiv 1 \pmod 3$. Also ist die Differenz der beiden Zahlen durch 3 teilbar und damit auch der gesamte Term.
Teilbarkeit durch 5:
Die folgende Tabelle zeigt die Kongruenzklassen modulo 5: Wir sehen, dass für jede Restklasse

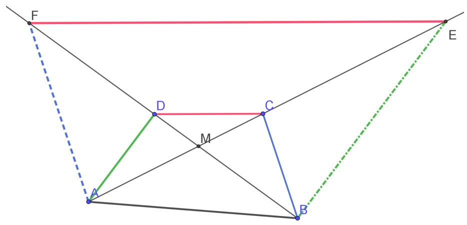
a	a^4
0	0
1	1
2	1
-2	1
-1	1

Einträge der Tabelle sind modulo 5

von $a \not\equiv 0 \pmod 5$ die vierten Potenzen den Rest 1 bei Division durch 5 haben.
Wir schließen analog zur Teilbarkeit durch 3, der Term ist also auch durch 5 teilbar.
Da der Term $a^d(a^{4b} - a^{4c})$ für jedes a sowohl durch 2, durch 3 als auch durch 5 teilbar sind, ist der Term durch $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ teilbar.

Aufgabe 8.

Die folgende Skizze zeigt die beschriebene Situation der Angabe.

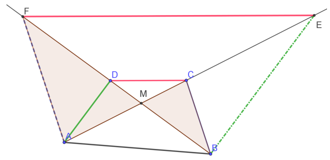


Die Parallele zu BC durch A und die Parallele zu AD durch B sind strichliert eingezeichnet. Die beiden Geraden CD und EF, die parallel sein sollen, sind rot eingezeichnet.

Unser Ziel ist es, nachzuweisen, dass

$$\frac{MC}{ME} = \frac{MD}{MF},$$

denn nach Umkehrung des Strahlensatzes wären dann die beiden Geraden EF und CD parallel.

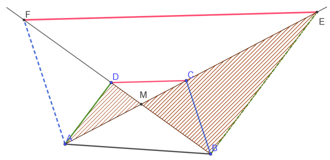


Durch Anwendung des Strahlensatzes mit den Parallelen AF und BC ergibt sich

$$\frac{MC}{MB} = \frac{MA}{MF},$$

also

$$MB \cdot MA = MC \cdot MF.$$



Ebenfalls durch Anwendung des Strahlensatzes mit den Parallelen AD und BE ergibt sich

$$\frac{MA}{ME} = \frac{MD}{MB},$$

also

$$MB \cdot MA = MD \cdot ME.$$

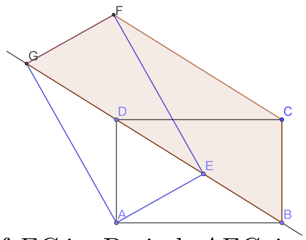
Also stimmen die beiden Terme $MC \cdot MF$ und $MD \cdot ME$ überein. Wir erhalten

$$MC \cdot MF = MD \cdot ME \iff \frac{MC}{ME} = \frac{MD}{MF},$$

was zu zeigen war.

Aufgabe 9.

Die folgende Skizze zeigt die in der Angabe beschriebene Situation:



Die Diagonale BD teilt das Rechteck $ABCD$ in zwei kongruente Dreiecke, deren Höhen gleich lang sind. Das gilt auch für das Rechteck $AEFG$.

Da die Höhe auf BD im Dreieck ABD identisch ist mit der Höhe auf EG im Dreieck AEG, ist alles gezeigt.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.

von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.

aus [1, Z 3.53], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team.

Aufgabe 4.

aus [3], übersetzt und bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 5.

[1, Gl. 5.36], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 6.

von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 7.

aus [3], übersetzt und bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team.

Aufgabe 8.

[1, Gl. 5.35], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 9.

aus [2, LWA 1999], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Literatur

[1] Tom Ballik. *Mathematik-Olympiade (für Anfänger).* ikon VerlagsGesmbH, 2012.

[2] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 1990–1999: Aufgaben und Lösungen.* öbv, 1999.

[3] Loren C Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer Science & Business Media, 2012.