52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 11. Dezember 2020

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Karl Czakler zusammengestellt.

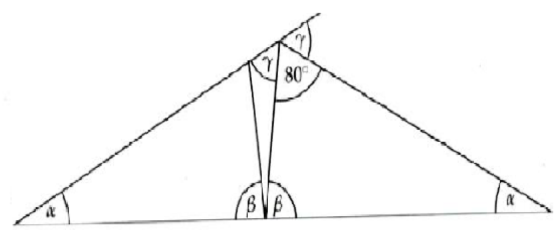
Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

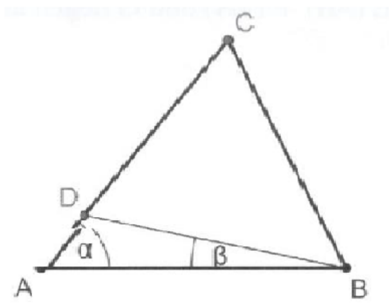
Am 7. Dezember 2020 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Karl Czakler bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 11. Dezember 2020 von 16:20-18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1. Bestimme die Winkel α, β und γ in der linken untenstehenden Figur.





Aufgabe 2. Im dargestellten Dreieck ABC mit dem Punkt D auf AC gilt $AB = AC$ und $BC = BD$. Der Winkel $\angle ABD = \beta$ beträgt $12°$.
Wie groß ist der Winkel α?

Aufgabe 3. Das Dreieck ABC mit der Basis AB ist gleichschenkelig und der Winkel $\gamma = \angle ACB$ beträgt $45°$. Der Umkreismittelpunkt von ABC sei U. Der Umkreis des Dreiecks ABU schneidet die beiden Schenkel AC und BC in den Punkten D und E.
Beweise, dass der Winkel $\angle BAC$ durch AU und AE gedrittelt wird.

Aufgabe 4. Gegeben ist ein Trapez $ABCD$ mit AB parallel zu CD uind $BC = CD = DA$. Beweise, dass die Diagonalen in den Punkten A und B Winkelhalbierende sind!

Aufgabe 5. Es sei $ABCDE$ ein konvexes Fünfeck mit fünf gleich langen Seiten und rechten Winkeln in den Eckpunkten C und D. Weiters sei P der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD. Man beweise, dass die Strecken PA und PD gleich lang sind.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Winkeljagd

Aufgabe 2: Verwende die Eigenschaften eines gleichschenkeligen Dreiecks

Aufgabe 3: Versuche jedes Drittel des Winkels zu berechnen!

Aufgabe 4: Überlege welche zusätzliche Eigenschaften ein gleichschenkeliges Trapez hat.

Aufgabe 5: $BCDE$ ist ein Quadrat, ABD ein gleichseitiges Dreieck. Daraus lassen sich einige Winkeln berechnen.

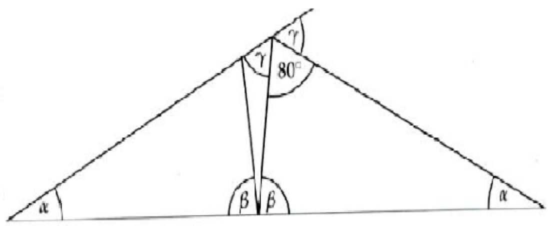
Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

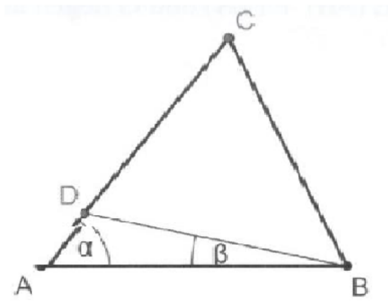
Lösungsvorschläge von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Zunächst folgt $2\gamma + 80° = 180°$, daraus folgt $\gamma = 50°$. Weiters ist γ Außenwinkel im gleichschenkeligen Dreieck mit Basiswinkel α. Daraus folgt $\gamma = 2\alpha$, also $\alpha = 25°$. Schließlich gilt $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, also $\beta = 75°$.

Aufgabe 2.



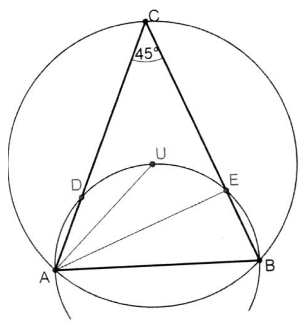


Die Winkel $\angle BCA$ und $\angle ABC$ sind gleich groß, daher gilt $2\angle BCA + \alpha = 180°$, also $\angle BCA = \frac{180° - \alpha}{2}$. Die Winkel $\angle CDB$ und $\angle BCD = \angle BCA$ sind ebenfalls gleich groß und mit $\angle BCD = \alpha + 12°$ gilt daher

$$\frac{180° - \alpha}{2} = \alpha + 12°.$$

Daraus ergibt sich $\alpha = 52°$.

Aufgabe 3.



Das Dreieck AUC ist gleichschenkelig, daher gilt $22,5° = \angle UCA = \angle CAU$. Die Basiswinkel im gleichschenkeligen Dreieck sind gleich groß, damit folgt

$$\angle CAB = \angle ABC = \frac{180° - 45°}{2} = 67,5°.$$

Das Dreieck ABE ist rechtwinkelig (Satz von Thales). Daher gilt

$$\angle EAB = 90^\circ - \angle ABC = 90^\circ - 67,5^\circ = 22,5^\circ.$$

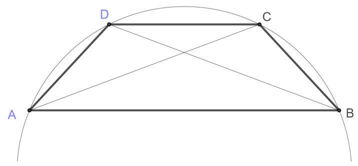
Daraus folgt

$$\angle UAE = \angle CAB - \angle CAU - \angle EAB = 67,5^\circ - 22,5^\circ - 22,5^\circ = 22,5^\circ,$$

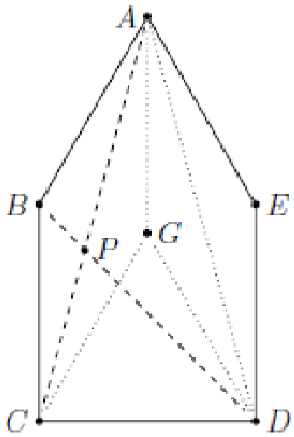
und damit ist alles gezeigt.

Aufgabe 4.

Ein gleichschenkeliges Trapez besitzt einen Umkreis. Da zu gleich langen Sehnen gleich große Peripheriewinkel gehören sind etwa die Winkel $\angle CAB$ und $\angle DAC$ als Peripheriewinkel über den Sehnen BC und CD gleich groß und daher halbiert die Gerade AD den Winkel $\angle CBA$.



Aufgabe 5.



Wegen der rechten Winkel in C und D ist $BCDE$ ein Quadrat und daher AB ein gleichseitiges Dreieck mit gleicher Seitenlänge. Somit gilt $EA = EB = ED$. Daher ist E Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABD. Wegen $\angle AEB = 60^\circ$ gilt also nach dem Peripheriewinkelsatz

$$\angle ADB = \frac{\angle AEB}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$$

Verschiebt man das gleichseitige Dreieck ABE so, dass B auf C und E auf D abgebildet wird, dann erhält man als Bild des Punktes A den innerhalb des Quadrats $BCDE$ liegenden dritten Eckpunkt

G des gleichseitigen Dreiecks CDG, dessen Seitenlänge mit der des Fünfecks $ABCDE$ und damit auch mit der Länge der Schiebestrecke AG übereinstimmt. Daraus folgt $GA = GC = GD$, also ist G Umkreismittelpunkt des Dreiecks ACD. Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt daher auch

$$\angle CAD = \frac{\angle CGD}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$$

Das bedeutet wegen $\angle PAD = \angle CAD = \angle ADB = \angle ADP = 30^\circ$, dass das Dreieck ADP ein gleichschenkliges Dreieck mit Basis AD ist. Daraus folgt $PA = PD$.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

Geometrie Skriptum Oemo

Aufgabe 2.

aus [2], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 3.

aus [2], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 4.

aus [2], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 5.

[1, Aufgabe 4 (Gottfried Perz)] bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Literatur

[1] Junior-Regionalwettbewerb 2016. `https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/204`. (aufgerufen am 14.12.2020).

[2] Tom Ballik. *Mathematik-Olympiade (für Anfänger)*. ikon VerlagsGesmbH, 2012.