52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 18. Dezember 2020

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Josef Pech zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 15. Dezember 2020 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Josef Pech bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 18. Dezember 2020 von 16:20–18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1. Zeige, dass 11 ein Teiler von $3^{73} - 5$ ist.

Aufgabe 2. Zeige, dass 91 ein Teiler von $5^{36} - 1$ ist.

Aufgabe 3. Bestimme alle reellen Zahlen x mit

$$|x^2 - 4x + 1| > |x^2 - 4x + 5|$$

Aufgabe 4. In der „*pythagoreischen Gleichung*“ $a^2 + b^2 = c^2$ mit a, b, $c \in \mathbb{Z}^+$ können nicht beide Katheten a und b ungerade Zahlen sein.
Zeige dies.

Aufgabe 5. Sei a eine reelle Zahl. Bestimme die reellen Lösungen der Gleichung

$$x^3 + a^3 = x^2 - ax + a^2$$

in Abhängigkeit von a.

Aufgabe 6. Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ganzer Zahlen ist gegeben durch $a_1 = a_2 = 1$ und

$$a_{n+2} = a_n \cdot a_{n+1} + 3.$$

Zeige, dass a_{2022} durch 5 teilbar ist.
Bestimme auch die Einerstelle von a_{2022}.

Aufgabe 7. Löse das Gleichungssystem

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

in den rationalen Zahlen.

Aufgabe 8. Löse in den ganzen Zahlen

$$(x^2 - y^2)^{3-x-y} = 4.$$

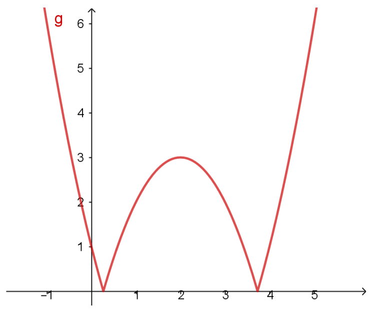
Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Betrachte die Potenzen von 3 (mod 11) und erkenne ein Muster.
Oder setze den Satz von Fermat ein („kleiner Fermat")

Aufgabe 2. $91 = 7 \cdot 13$.
Dann gehe wie in Aufgabe 1 vor.

Aufgabe 3.

Für die rechte Seite der Ungleichung kann man den Betrag weglassen. Warum?
Für die linke Seite der Ungleichung muss man drei Fälle unterscheiden.
(In der Figur ist der Funktionsgraph der Funktion g mit der Vorschrift $g(x) = |x^2 - 4x + 1|$ abgebildet)



Aufgabe 4. Betrachte die Gleichung (mod 4).

Aufgabe 5. $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$. Dann Vorsicht beim „Kürzen".

Aufgabe 6. Teilbarkeit durch 5. Also schau dir die Folge (mod 5) an (nicht sofort aufgeben, man muss einige Folgenglieder überblicken) und erkenne ein Muster.

Aufgabe 7. Mit Hilfe der ersten Gleichung kann man in der zweiten Gleichung eine Variable schnell ersetzen.

Aufgabe 8. Für welche ganzen Zahlen a und b ist $a^b = 4$?

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Nach kleinem Satz von Fermat gilt $3^{11-1} \equiv 1 \pmod{11}$.
Also gilt:

$$3^{73} = \left(3^{10}\right)^7 \cdot 3^3 \equiv 1 \cdot 27 \equiv 5 \pmod{11}$$

Aufgabe 2.

Wir untersuchen den Ausdruck modulo 7 und modulo 13.
Es gilt (unter Verwendung des kleinen Satz von Fermat):

$$5^{36} \equiv \left(5^6\right)^6 \equiv 1 \pmod{7}.$$

Analog gilt

$$5^{36} \equiv \left(5^{12}\right)^3 \equiv 1 \pmod{13}.$$

Also teilt sowohl 7 als auch 13 die gegebene Zahl. Da beide Zahlen prim sind teilt auch deren Produkt $13 \cdot 7 = 91$ den Ausdruck.
(Allgemein gilt: Teilen zwei Zahlen a und b eine Ausdruck T und ist weiters $\text{ggT}(a, b) = 1$, dann gilt auch: $a \cdot b \mid T$.)

Aufgabe 3.

Rechts können wir den Betrag weglassen, denn

$$x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x-2)^2 + 1 \geq 1 > 0.$$

Die Gleichung $x^2 - 4x + 1 = 0$ liefert mittels quadratischer Lösungsformel die beiden Nullstellen $2 - \sqrt{3}$ und $2 + \sqrt{3}$. In diesem Intervall ist der Ausdruck $x^2 - 4x + 1$ negativ, in den beiden anderen Intervallen ist der Ausdruck positiv
Wir betrachten also drei Fälle:

(i) $x \leq 2 - \sqrt{3}$

Die Ersatzungleichung ohne Beträge lautet

$$x^2 - 4x + 1 > x^2 - 4x + 5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 > 4.$$

Dies ist ein Widerspruch, da kein x diese Ungleichung erfüllt, somit auch kein x aus unserem Intervall.

(ii) $2 - \sqrt{3} < x \leq 2 + \sqrt{3}$

Die Ersatzungleichung ohne Beträge lautet

$$\begin{aligned} & -\left(x^2 - 4x + 1\right) > x^2 - 4x + 5 \\ \Longleftrightarrow\ & 0 > 2x^2 - 8x + 6 \\ \Longleftrightarrow\ & 0 > x^2 - 4x + 3 = (x-3) \cdot (x-1). \end{aligned}$$

Das Produkt $(x-3)\cdot(x-1)$ ist genau dann negativ, wenn einer der beiden Faktoren negativ ist. Für $1 < x < 3$ ist $(x-1)$ positiv und $(x-3)$ negativ. Da $2-\sqrt{3} < 1$ und $3 < 2+\sqrt{3}$ gilt, ist das gesamte Intervall in unserer Lösungsmenge, also $\mathbb{L}_{(\text{ii})} =]1;\,3[$.

(iii) $x > 2+\sqrt{3}$

Die Ersatzungleichung ist dieselbe wie in Fall (i), weil der Ausdruck innerhalb des Betrags der linken Seite für dieses Intervall wiederum positiv ist und somit die Betragsstriche weggelassen werden können. Wiederum ist die Ungleichung äquivalent zu $0 > 4$ und auch dieser Fall liefert keine weiteren Lösungen.

Die Lösungsmenge ist somit $\mathbb{L} = \mathbb{L}_{(\text{ii})} =]1;\,3[$.

Aufgabe 4.

Angenommen, a und b sind beide ungerade, also kongruent zu 1 oder 3 modulo 4. Dann sind ihre Quadrate jedenfalls kongruent zu 1 modulo 4 und ihre Summe kongruent zu 2 modulo 4.
Da 2 kein quadratischer Rest modulo 4 ist, ist das ein Widerspruch und die Annahme deshalb falsch.

Aufgabe 5.

Die linke Seite der Gleichung zerfällt in

$$x^3 + a^3 = (x+a)\cdot(x^2 - ax + a^2).$$

Wir betrachten also die Gleichung

$$(x+a)\cdot(x^2 - ax + a^2) = x^2 - ax + a^2.$$

Kürzen darf man nur, wenn sichergestellt ist, dass $x^2 - ax + a^2 \neq 0$ ist. In diesem Fall erhalten wir $x_1 = 1 - a$.
Im Sonderfall $x^2 - ax + a^2 = 0$ liefert die kleine Lösungsformel $x_{2,\,3} = \frac{a}{2} \pm \frac{-3a^2}{2}$. Der Ausdruck unter der Wurzel ist nur für $a = 0$ reell (andernfalls imaginär). Für $a = 0$ erhalten wir die Gleichung

$$x^3 = x^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2(x-1) = 0,$$

mit den Lösungen $x = 0$ und $x = 1$.
Zusammenfassend:

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \{0;\,1\} & \text{für } a = 0 \\ \{1-a\} & \text{für } a \neq 0 \end{cases}$$

Aufgabe 6.

Wir betrachten die Folgenglieder modulo 5:

$$(a_n)_{(\text{mod } 5)} = (1,\,1,\,2,\,2,\,1,\,0,\,3,\,3,\,2,\,4,\,1,\,2,\,0, 3,\,\ldots).$$

Für $n = 6$ erhalten wir $a_6 \equiv 0 \pmod 5$, ebenso für $n = 13$. Der Zyklus

$$0,\,3,\,3,\,2,\,4,\,1,\,2$$

wiederholt sich fortlaufend ab $n = 6$.

Kurz: für $n \equiv 6 \pmod 7$ erhalten wir 0 und sonst nicht. Da $2022 = 288 \cdot 7 + 6 \equiv 6 \pmod 7$ ist a_{2022} duch 5 teilbar.
Die Einerstelle ist demnach entweder 5 oder 0. Zur Bestimmung der Einerstelle müssen wir den Modul 10 wählen. Eine ähnliche Betrachtung wie oben – ein Zyklus hat die Länge 14 – liefert, dass die Einerstelle 0 ist.

Aufgabe 7.

Wir stellen fest, dass $-1 \neq a$ und $-1 \neq b$ gelten muss, damit die zweite Gleichung definiert ist.
Wir können nun die zweite Gleichung mit dem Hauptnenner $(1 + a) \cdot (1 + b)$ multiplizieren und erhalten die äquivalente Gleichung

$$6 + 3(a + b) = 4(1 + a + b + ab).$$

Setzen wir die erste Gleichung $a + b = 2$ ein, so gilt:

$$6 + 3 \cdot 2 = 4(1 + 2 + ab) \quad \Longleftrightarrow \quad 12 = 4 \cdot (3 + ab) \quad \Longleftrightarrow \quad ab = 0.$$

Folglich ist entweder $a = 0$ oder $b = 0$ und wir erhalten die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{(0,\, 2); (2,\, 0)\}$.

Aufgabe 8.

Die ganzzahlige Gleichung $a^b = 4$ hat die drei möglichen Lösungen $a_1 = 4$, $b_1 = 1$, $a_2 = 2$, $b_2 = 2$ und $a_3 = -2$, $b_3 = 2$.
Wir müssen also die Gleichungssysteme der Form

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= a_i \\ 3 - x - y &= b_i \end{aligned}$$

für $i = 1, 2, 3$ lösen.
Wir bemerken zunächst, dass mittels dritter binomischer Formel $x^2 - y^2 = (x - y) \cdot (x + y)$ gilt.
Wir lösen für $i = 1$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &(x - y) \cdot (x + y) = 4 \\ &3 - x - y = 1 \iff x + y = 2. \end{aligned}$$

Setzt man $x + y = 2$ in die erste Gleichung ein, so erhält man $x - y = 2$. Daraus folgt sofort, dass $y = 0$ und somit $x = 2$ gelten muss.
Wir lösen für $i = 2$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &(x - y) \cdot (x + y) = 2 \\ &3 - x - y = 2 \iff x + y = 1. \end{aligned}$$

Setzt man $x + y = 1$ in die erste Gleichung ein, so erhält man $x - y = 2$. Daraus folgt, dass $x = 1,5$ und $y = -0,5$ ist, ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass beide Zahlen ganzzahlig sind.
Analog führt auch der dritte Fall zu keinem ganzzahligen Lösungspaar.
Die Lösungsmenge ist demnach $\mathbb{L} = \{(2,\, 0)\}$.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.

von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.

aus [2, LWA 2002], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 4.

aus [3], übersetzt und bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 5.

siehe [1], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 6.

von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 7.

aus [1, 2017, Jahrgang 9, Runde 2], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team.

Aufgabe 8.

von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Literatur

[1] Archivierte Aufgaben der Deutschen Mathematik-Olympiade. `https://www.mathematik-olympiaden.de/moev/index.php/aufgaben/aufgabenarchiv`. (aufgerufen am 21.12.2020).

[2] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2000–2008: Aufgaben und Lösungen.* Nova MD, 2018. Auflage 1.3.

[3] Loren C Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer Science & Business Media, 2012.