52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 8. Jänner 2021

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Karl Czakler zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 5. Jänner 2021 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Karl Czakler bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 8. Jänner 2021 von 16:20-18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1.
Es seien x und y positive reelle Zahlen mit $x+y=1$.
Man beweise:

$$\frac{(3x-1)^2}{x}+\frac{(3y-1)^2}{y}\geq 1$$

Aufgabe 2. Es seien x, y positive reelle Zahlen mit $x+y+xy=3$.
Man beweise, dass $x+y\geq 2$.

Aufgabe 3. Für die positiven reellen Zahlen x und y gilt die Bedingung $xy=4$.
Man beweise, dass die Ungleichung

$$\frac{1}{x+3}+\frac{1}{y+3}\leq\frac{2}{5}$$

gilt und gebe an, wann Gleichheit eintritt.

Aufgabe 4. Es seien a, b, c, d reelle Zahlen.
Beweise, dass von den Zahlen $a-b^2, b-c^2, c-d^2$ und $d-a^2$ nicht alle größer als $\frac{1}{4}$ sein können.

Aufgabe 5. Beweise die Mittelungleichungen für zwei Variable: Es seien x_1, x_2 positive reelle Zahlen. Es gilt:

$$\max(x_1,x_2)\geq\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}\geq\frac{x_1+x_2}{2}\geq\sqrt{x_1x_2}\geq\frac{2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}\geq\min(x_1,x_2)$$

$$QM\geq AM\geq GM\geq HM$$

Quadratisches Mittel $\geq$ Arithmetisches Mittel $\geq$ Geometrisches Mittel $\geq$ Harmonisches Mittel
Gleichheit für $x_1=x_2$.

Aufgabe 6. Beweise folgende Basisungleichungen:

$$\begin{aligned}
a+1 &\geq 2\sqrt{a} \qquad a \in \mathbb{R}^+, \qquad \textit{Gleichheit für } a=1 && (1)\\
\frac{a}{b}+\frac{b}{a} &\geq 2 \qquad a,b \in \mathbb{R}^+, \qquad \textit{Gleichheit für } a=b && (2)\\
x+\frac{1}{x} &\geq 2 \qquad x \in \mathbb{R}^+, \qquad \textit{Gleichheit für } x=1 && (3)\\
(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) &\geq 4 \qquad a,b \in \mathbb{R}^+, \qquad \textit{Gleichheit für } a=b && (4)\\
(a+b)(b+c)(c+a) &\geq 8abc \qquad a,b,c \in \mathbb{R}^+, \qquad \textit{Gleichheit für } a=b=c && (5)\\
a^2+b^2+c^2 &\geq ab+bc+ca \qquad a,b,c \in \mathbb{R}, \qquad \textit{Gleichheit für } a=b=c && (6)\\
(a+b+c)^2 &\geq 3(ab+bc+ca) \qquad a,b,c \in \mathbb{R}, \qquad \textit{Gleichheit für } a=b=c && (7)\\
3(a^2+b^2+c^2) &\geq (a+b+c)^2 \qquad a,b,c \in \mathbb{R}, \qquad \textit{Gleichheit für } a=b=c && (8)\\
\sqrt{(a+c)(b+d)} &\geq \sqrt{ab}+\sqrt{cd} \qquad a,b,c,d \in \mathbb{R}^+, \qquad \textit{Gleichheit für } bc=ad && (9)\\
\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2} &\geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \qquad a,b \in \mathbb{R}^+, \qquad \textit{Gleichheit für } a=b && (10)
\end{aligned}$$

Aufgabe 7. Es seien a, b und c positive reelle Zahlen. Beweise:

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right) \geq 8$$

Aufgabe 8. Gegeben ist ein Parallelogramm $ABCD$. Über den Strecken AB und AD werden gleichseitige Dreiecke ABF und ADE gezeichnet.
Zeige, dass das Dreieck FCE gleichseitig ist.

Aufgabe 9. Es seien a, b und c positive reelle Zahlen. Man beweise:

$$\frac{a}{c}+\frac{c}{b} \geq \frac{4a}{a+b}.$$

Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 10. Man zeige für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$ mit $x^2+y^2=1$, dass folgende Ungleichung gilt:

$$x^3+y^2 \geq \sqrt{xy}.$$

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Binome ausquadrieren und dann auf gemeinsamen Nenner bringen.

Aufgabe 2. Führe einen indirekten Beweis. Nimm $x + y > 2$ an und führe das auf einen Widerspruch.

Aufgabe 3. Gemeinsamer Nenner!

Aufgabe 4. Auch hier empfiehlt sich ein indirekter Beweis!

Aufgabe 5. Beweise alle diese Ungleichungen durch Umformen auf vollständige Quadrate!

Aufgabe 6. Beweise alle diese Ungleichungen durch Umformen auf vollständige Quadrate!

Aufgabe 7. Verwende die arithmetisch- geometrische Mittelungleichung

Aufgabe 8. Beweise, dass alle Seiten des Dreiecks FCE gleich lang sind!

Aufgabe 9. Auf gemeinsamen Nenner bringen!

Aufgabe 10. Mittelungleichungen!

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Die Ungleichung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}
\frac{9x^2-6x+1}{x}+\frac{9y^2-6y+1}{y} &\geq 1\\
9x-6+\frac{1}{x}+9y-6+\frac{1}{y} &\geq 1\\
9(x+y)-12+\frac{1}{x}+\frac{1}{y} &\geq 1\\
\frac{1}{x}+\frac{1}{y} &\geq 4\\
x+y &\geq 4xy\\
(x+y)^2 &\geq 4xy\\
(x-y)^2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Gleichheit gilt für $x=y=\frac{1}{2}$.

Aufgabe 2.

Wir führen einen indirekten Beweis und nehmen $x+y<2$ an. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
(x-y)^2 &\geq 0\\
x^2-2xy+y2 &\geq 0\\
4>(x+y)^2 &\geq 4xy\\
4 &> 4xy\\
1 &> xy.
\end{aligned}$$

Mit $x+y+xy<2+1=3$ haben wir dann einen Widerspruch. Es muss also $x+y\geq 2$ gelten.

Aufgabe 3.

Da alle Nenner sicher positiv sind können wir die Ungleichung mit $5(x+3)(y+3)$ multiplizieren. Mit Verwendung von $xy=4$ erhält man die äquivalente Ungleichung

$$4\leq x+y.$$

Das folgt aber unmittelbar aus $(x+y)^2\geq 4xy=16$.
Gleichheit gilt für $x=y=2$.

Aufgabe 4.

Wir führen einen indirekten Beweis und nehmen an, dass all diese Zahlen größer als $\frac{1}{4}$ sind, also

$$a-b^2>\frac{1}{4},\quad b-c^2>\frac{1}{4},\quad c-d^2>\frac{1}{4},\quad d-a^2>\frac{1}{4}.$$

Summiert man diese vier Ungleichungen so erhält man

$$a - b^2 + b - c^2 + c - d^2 + d - a^2 > 1.$$

Das ist äquivalent zu

$$0 > a^2 - a + \frac{1}{4} + b^2 - b + \frac{1}{4} + c^2 - c + \frac{1}{4} + d^2 - d + \frac{1}{4},$$

also zu

$$0 > \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(d - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Das ist aber ein Widerspruch, daher muss mindestens eine dieser vier Zahlen größer oder gleich Null sein.

Aufgabe 5.

Exemplarisch soll hier eine Ungleichung bewiesen werden. Wir zeigen

$$\sqrt{x_1 x_2} \geq \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}.$$

Diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}
\sqrt{x_1 x_2} &\geq \frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2} \\
(x_1 + x_2)\sqrt{x_1 x_2} &\geq 2x_1 x_2 \\
(x_1 + x_2)^2 x_1 x_2 &\geq 4x_1^2 x_2^2 \\
(x_1 + x_2)^2 &\geq 4x_1 x_2 \\
(x_1 - x_2)^2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Gleichheit gilt für $x_1 = x_2$.

Aufgabe 6.

Wir beweisen etwa die Ungleichung (9):

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

Folgende Ungleichungen sind zu dieser äquivalent:

$$\begin{aligned}
(a+c)(b+d) &\geq ab + 2\sqrt{abcd} + cd \\
ab + ad + cb + cd &\geq ab + 2\sqrt{abcd} + cd \\
ad + cb &\geq 2\sqrt{abcd} \\
(ad + cb)^2 &\geq 4abcd \\
(ad - cb)^2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Damit ist die Ungleichung bewiesen. Gleichheit gilt für $ad = cb$.

Aufgabe 7.

Mit der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung folgt

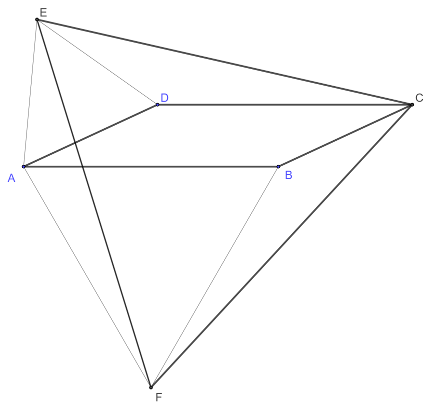
$$\left(a+\frac{1}{b}\right) \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Analog schätzt man die beiden anderen Ausdrücke ab. Damit erhält man eine schärfere Ungleichung die aber unmittelbar richtig ist:

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right) \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}2\sqrt{\frac{b}{c}}2\sqrt{\frac{c}{a}} = 8\sqrt{\frac{abc}{bca}} = 8.$$

Aufgabe 8.

Sei $\alpha = \angle DAB$, $a = AB = CD$ und $b = BC = AD$



Die Dreiecke AFE, BFC und DCE sind kongruent, da sie in zwei ihrer Seitenlängen (jeweils gleich a und b) und ihren eingeschlossenen Winkel $(= 120^\circ + \alpha)$ übereinstimmen.

Aufgabe 9.

Mit der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung kann man die linke Seite der Ungleichung folgendermaßen abschätzen:

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Es genügt daher die schärfere Ungleichung

$$2\sqrt{\frac{a}{b}} \geq \frac{4a}{a+b}.$$

zu beweisen. Das ist aber äquivalent zu

$$\frac{a}{b} \geq \frac{4a^2}{(a+b)^2}$$

also zu
$$(a+b)^2 \geq 4ab \Longleftrightarrow (a-b)^2 \geq 0.$$
Gleichheit gilt für $a=b=c$.

Aufgabe 10.

Es gilt:
$$x^3+y^3=(x^2+y^2)(x+y)-xy(x+y)=(x+y)(1-xy).$$
Wir können nun die Ungleichung mit $x+y \geq 2\sqrt{x}$ verschärfen und haben

$$2\sqrt{xy}(1-xy) \geq \sqrt{xy}$$

zu zeigen. Das ist äquivalent zu

$$x^2+y^2=1 \geq 2xy,$$

also zu
$$(x-y)^2 \geq 0.$$

Damit ist die Ungleichung bewiesen.
Gleichheit gilt für $x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

Skriptum Ungleichungen, ÖMO

Aufgabe 2.

aus [3, JRW 2011], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 3.

aus [1, Aufgabe 2 (Walther Janous)], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 4.

Skriptum Ungleichungen, ÖMO

Aufgabe 5.

Skriptum Ungleichungen, ÖMO

Aufgabe 6.

Skriptum Ungleichungen, ÖMO

Aufgabe 7.

Skriptum Ungleichungen, ÖMO

Aufgabe 8.

Skriptum Geometrie, ÖMO

Aufgabe 9.

aus [2, Aufgabe 1 (Walther Janous)], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 10.

Literatur

[1] Junior-Regionalwettbewerb 2015. `https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/102`. (aufgerufen am 11.01.2021).

[2] Junior-Regionalwettbewerb 2018. `https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/440`. (aufgerufen am 11.01.2021).

[3] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2009–2018: Aufgaben und Lösungen*. Nova MD, 2019.