52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 15. Jänner 2021

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Josef Pech zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 12. Jänner 2021 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Josef Pech bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 15. Jänner 2021 von 16:20-18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

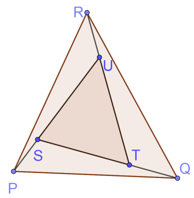
Aufgaben

Aufgabe 1. Auf wie viele Arten kann man $n = 21$ als Summe von drei positiven ganzen Zahlen a, b, c mit $a \geq b \geq c > 0$ darstellen? Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn $n = 2021$ ist?

Aufgabe 2. Für welche ganzen Zahlen x, y gilt $x^2 + 3x = y^2$?

Aufgabe 3.

In nebenstehender Skizze gilt: $TQ = \frac{1}{2}TS$; $UR = \frac{1}{3}UT$; $SP = \frac{1}{4}SU$. Der Inhalt des Dreiecks STU beträgt 1. Berechne den Inhalt des Dreiecks PQR.



Aufgabe 4. Gegeben ist ein konvexes Viereck $ABCD$ und ein Punkt N in seinem Inneren derart, dass $|AN| = |DN| = 8$, $|BN| = |CN| = 6$ und $|\angle DNB| = |\angle ANC| = 120°$ gilt.

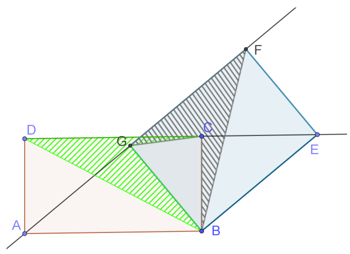
a) Berechne den Flächeninhalt des Vierecks ABCD für $|\angle ANB| = 30°$

b) Zeige, dass der Flächeninhalt des Vierecks ABCD maximal ist, wenn $|\angle ANB| = 30°$ ist.

Aufgabe 5. Zeige, dass für alle reellen Zahlen x, y die Ungleichung $4x^2 + y^2 + 5 \geq 4(x + y)$ gilt. Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 6.

$ABCD$ und $BEFG$ seien Rechtecke so, dass E auf der Geraden DC und A auf der Geraden FG liegt (Skizze). Zeige, dass die nichtkonvexen Vierecke $BFGC$ und $CDBG$ flächengleich sind.



Aufgabe 7.
Die Zahl x sei die kleinste positive ganze Zahl, so dass $2x$ eine Quadratzahl, $3x$ eine Kubikzahl und $5x$ die 5. Potenz einer ganzen Zahl ist.

a) Gib die Primfaktorzerlegung von x an

b) Wie viele Teiler hat x?

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1.

Aufgabe 2: Es gibt 6 Zahlenpaare.

Aufgabe 3:

Aufgabe 4:

b) Die Diagonallängen sind fix.

Aufgabe 5: Verwandle in die Form $A^2 + B^2 \geq 0$

Aufgabe 6: $ABCD$ und $BEFG$ sind flächengleich.

Aufgabe 7:

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

x	y	z	Anzahl
19	1	1	1
18	2	1	1
17	3	1	2
	2	2	
16	4	1	2
	3	2	
...	...	...	...
11	9	1	5
	8	2	
	7	3	
	6	4	
	5	5	
10	10	1	5
	9	2	
	8	3	
	7	4	
	6	5	
9	9	3	4
	8	4	
	7	5	
	6	6	
8	8	5	2
	7	6	
7	7	7	1

Ges.:$1+1+2+2+3+3+4+4+5+5+4+2+1 = 2\cdot(1+\ldots+5)+4+2+1 = 2\cdot(1+5)\cdot\frac{5}{2}+7 = 37$
Auf entsprechende Art wird auch für $n = 2021$ vorgegangen. Dies liefert 340370 mögliche Darstellungen.

Aufgabe 2.

$(0|0)$ ist eine Lösung. Wenn x positiv ist, so ist die linke Seite $LS > RS$. Wenn x negativ ist, so ist $LS < RS$.
Wir setzen $y = x + k$ $x^2 + 3x = x^2 + 2kx + k^2$
$x(3-2k) = k^2$ bzw. $x = \frac{k^2}{3-2k^2}$, wobei der nenner $\neq 0$ ist.
Also gilt: $(3-2k)|k^2 \cdot 2 \qquad (3-2k)|(3-2k)\cdot k$
Nach den Regeln für Teilbarkeit ist $(3-2k)$ auch Teiler von $2k^2 + 3k - 2k^2 = 3k$.
Somit $(3-2k)|3k \cdot 2$ und $(3-2k)|(3-2k)\cdot 3$ und auch$(3-2k)|9$.
$(3-2k)$ liegt also in $\{\pm 1, \pm 3; \pm 9\}$.
Das ergibt für k die Werte $1; 2; 0; 3; -3; 9; -9$
$L = \{(1|2); (1|-2); (-4|2); (-4|-2); (0|0); (-3|0)\}$.

Aufgabe 3.

$|SUQ| = \frac{3}{2,1} \Rightarrow |UTQ| = \frac{1}{2}$. Mit dieser Methode lassen sich die Inhalte der Dreiecke RTQ; UTP; SUR; PQS; PUR bestimmen und folglich ergibt sich für $|PQR| = \frac{59}{24}$.

Aufgabe 4.

a)

$$\angle AND = 90°; \angle BNC = 90°. \tag{1}$$
$$|BNC| = \frac{36}{2} = 18 \tag{2}$$
$$|AND| = \frac{64}{2} = 32 \tag{3}$$
$$|ABN| = \frac{6,8}{2 \cdot \sin(30°)} = 12 \tag{4}$$
$$|CND| = \frac{6,8}{2 \cdot \sin(150°)} = 12 \tag{5}$$
$$A_{ges} = 74 \tag{6}$$

b) Die Diagonallängen AC bzw. BD sind unabhängig von der Wahl des Winkels $\angle ANB$. Folglich ist der Inhalt maximal, wenn die beiden Diagonalen normal aufeinander stehen. Wenn das der Fall ist, ist der gesuchte Winkel $\angle ANB = 30°$.

Aufgabe 5.

$(2x - 1)^2 + (y - 2)^2 \geq 0$.
Gleichheit nur für $x = \frac{1}{2}$, $y = 2$

Aufgabe 6.

Sei P der Schnittpunkt von CD mit GF. Dann ist $ABCD$ ist flächengleich dem Parallelogramm $ABEP$. Und dieses Parallelogramm ist flächengleich $BEFG$.
Also sind die beiden rechtwinkeligen Dreiecke BCD und BFG flächengleich. Nimmt man von diesen jeweils das Dreieck BCG weg, so sind die „Reste“ flächengleich.

Aufgabe 7.

$$x = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma \tag{7}$$
$$2x = 2^{\alpha+1} \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma \tag{8}$$
$$3x = 2^\alpha \cdot 3^{\beta+1} \cdot 5^\gamma \tag{9}$$
$$5x = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^{\gamma+1} \tag{10}$$

$\alpha + 1$ ... gerade, α ... Vielfaches von 3, α Vielfaches von 5 $\Rightarrow \alpha = 15$
β ... gerade, $\beta + 1$ ... Vielfaches von 3, β ... Vielfaches von 5 $\Rightarrow \beta = 20$
γ gerade, γ aus $\{0; 3, 6; \ldots\}$, γ aus $\{4; 9; 14; \ldots\} \Rightarrow \gamma = 24$
$x = 2^{15} \cdot 3^{20} \cdot 5^{24}$
Anzahl der Teiler $= 16 \cdot 21 \cdot 25 = 8400$.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

Aufgabe 2.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.

siehe [1, 571036], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 5.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 6.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 7.

aus [2, LWA 2011 (Stefan Wagner)], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Literatur

[1] Archivierte Aufgaben der Deutschen Mathematik-Olympiade. `https://www.mathematik-olympiaden.de/moev/index.php/aufgaben/aufgabenarchiv`. (aufgerufen am 15.01.2021).

[2] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2009–2018: Aufgaben und Lösungen.* Nova MD, 2019.