52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 22. Jänner 2021

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Karl Czakler zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 19. Jänner 2021 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Karl Czakler bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 22. Jänner 2021 von 16:20-18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

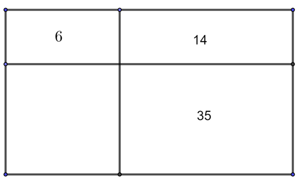
Aufgabe 1.

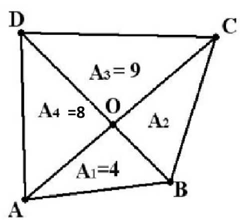
Zu jeder Ecke eines Würfels wird mit roter Farbe eine der Zahlen $1, 2, \ldots, 8$ geschrieben. Zu jeder Kante wird mit grüner Farbe die Summe der beiden Zahlen geschrieben, die bei den Endpunkten dieser Kante stehen.
Ist es möglich die roten Zahlen so anzuordnen, dass zwei grüne Zahlen gleich sind?

Aufgabe 2. Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $s = 30$. Der Mittelpunkt der Seite AB sei E und der Mittelpunkt der Seite AD sei F. Der Schnittpunkt der Diagonalen AC mit DE sei P und der Schnittpunkt von DE mit CF sei Q.
Berechne den Flächeninhalt des Vierecks $APQF$.

Aufgabe 3. Durch einen Punkt A im Inneren eines Winkels geht eine Gerade, die mit den Schenkeln des Winkels ein Dreieck kleinster Fläche bildet. Zeige, dass der Abschnitt dieser Geraden, welcher zwischen den Schenkeln liegt, durch den Punkt A halbiert wird.

Aufgabe 4. Ein Rechteck $ABCD$ wird durch zwei Strecken parallel zu den Seiten in vier kleinere Rechtecke zerlegt. Die Flächeninhalte von drei Rechtecken ist angegeben. Wie groß ist der Flächeninhalt des vierten Rechtecks?
Allgemein:
Die Diagonalen eines konvexen Vierecks $ABCD$ schneiden sich in O. Es sei $A_1 = [AOB] = 4$, $A_3 = [COD] = 9$ und $A_4 = [AOD] = 8$. Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks $A_2 = [BOC]$.
Mit $[ABC]$ ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC gemeint.





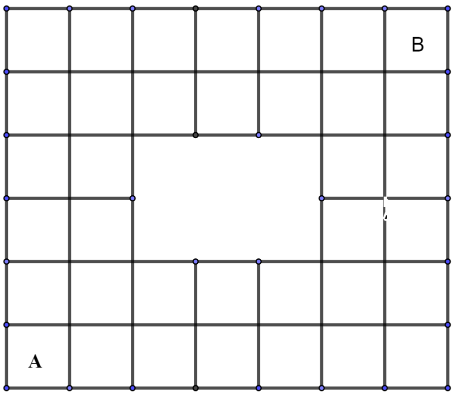
Aufgabe 5. Es seien a und b positive reelle Zahlen. Beweise;:

$$\frac{a}{a+1} + \frac{2b}{b+2} \leq \frac{3(a+b)}{a+b+3}.$$

Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 6. In einem Dreieck ist ein Winkel um $27°$ größer als das arithmetische Mittel der beiden anderen und ein Winkel doppelt so groß wie ein anderer.
Berechne, welche Werte für die Winkel des Dreiecks möglich sind.

Aufgabe 7. Wie viele verschiedene Wege gibt es von A nach B, wenn man von einem Feld aus immer nur auf das angrenzende Feld rechts oder auf das angrenzende Feld darüber gehen kann.



Aufgabe 8. Man beweise, dass für alle nicht negativen reellen Zahlen a, b, c gilt:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{ab}.$$

Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 9. Eine Zahl besteht aus sieben verschiedenen Ziffern und ist durch jede dieser Ziffer teilbar. Welche drei Ziffern kann diese Zahl nicht enthalten?

Aufgabe 10. Es seien a und b reelle Zahlen mit $0 \leq a, b \leq 1$. Man beweise:

$$\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} \leq 1.$$

Wann gilt Gleichheit?

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Überlege wie viele Summen (d.h. grüne Zahlen) möglich sind.

Aufgabe 2: $[APQF] = [AED] - [AEP] - [FQD]$ ([APQF] = Fläche des Vierecks APQF, usw.)

Aufgabe 3: Lege durch den Punkt A eine weitere Gerade und vergleiche die beiden entsprechenden Flächen.

Aufgabe 4: Die Aufgabe mit dem Rechteck kann man durch einfaches Überlegen lösen. Die allgemeine Aufgabe löst man, indem man geschickt mit der Flächenformel für ein Dreieck (Grundlinie mal Höhe durch 2) die Flächen der vier Dreiecke anschreibt.

Aufgabe 5: Auf gemeinsamen Nenner bringen.

Aufgabe 6: Berechne zunächst den Winkel der 27° größer als das arithmetische Mittel der beiden anderen ist. Er ist eindeutig bestimmt.

Aufgabe 7: Experimentiere zunächst mit einem kleineren Raster!

Aufgabe 8: Verschärfe die Ungleichung, indem du $\sqrt{bc}$ und die beiden anderen Wurzeln mit der geometrisch- arithmetischen Mittelungleichung abschätzt.

Aufgabe 9: Teilbarkeitsregeln verwenden

Aufgabe 10: Für $0 \leq a \leq 1$ gilt: $a^2 \leq a$.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Wir nehmen an, dass alle grünen Zahlen verschieden sind. Als Summen zweier roter Zahlen können die grünen Zahlen $3, 4, 5, \cdots 15$ auftreten. Da ein Würfel 12 Kanten hat, kann eine dieser 13 Zahlen nicht als Summe auftreten. Die Summe der grünen Zahlen $3+4+\cdots 15$ beträgt 117. Die Summe der roten Zahlen $1+2+\cdots 8$ beträgt 36. Da in jeder Ecke des Würfels drei Kanten zusammenlaufen, ist jede rote Zahl dreimal als Summand für ein grüne Zahl beteiligt. Daher ist die Summe aller grüner Zahlen gleich $3 \cdot 36 = 108$ und mit $117 - 108 = 9$ folgt, dass 9 nicht als grüne Zahl auftreten kann. Also müssen die Summen $15, 14, 13$ und 12 auftreten. Wir zeigen, dass das unmöglich ist.
Für 15 gibt es nur die Möglichkeit $15 = 7+8$. Für 14 gibt es nur die Möglichkeit $14 = 8+6$. Für 13 gibt es die Möglichkeiten $13 = 7+6$ oder $13 = 8+5$. Die erste Möglichkeit scheidet aus, weil 6 und 7 beide Endpunkte einer Kante durch 8 sind und daher nicht beide Endpunkte ein und derselben Kante sein können. Also ist $13 = 8+5$. (Die drei Endpunkte der Kanten durch 8 sind daher $5, 6$ und 7.) Versucht man nun 12 als Summe darzustellen, hat man die Möglichkeiten $12 = 7+5$ und $12 = 8+4$. Beides ist aber unmöglich.
Daher kann man die roten Zahlen nie so anordnen, dass alle grünen Zahlen verschieden sind.

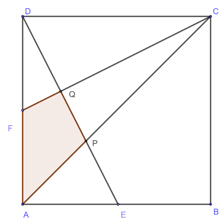
Aufgabe 2.

Es gilt:

$$[APQF] = [AED] - [AEP] - [FQD],$$

($[APQF]$ = Fläche des Vierecks $APQF$, usw.) und

$$AED = \frac{[ABCD]}{4} = 225.$$



Das Dreieck FQD ist ähnlich zum Dreieck EAD. Die entsprechenden Seiten DF und DE stehen im Verhältnis

$$\frac{a}{2} : \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 1 : \sqrt{5}.$$

Daher verhalten sich die entsprechenden Flächeninhalte wie $1 : 5$ und es gilt

$$[FQD] = \frac{AED]}{5} = 45.$$

Die Dreiecke APE und CPD sind ähnlich. Die entsprechenden Seiten AD und CD stehen im Verhältnis $1 : 2$. Die Höhen durch den Punkt P auf diese Seiten stehen ebenfalls im Verhältnis $1 : 2$. Daher ist die Länge der Höhe durch P auf die Seite AE gleich $\frac{a}{3}$ und es gilt

$$[AEP] = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} = 75.$$

Also haben wir

$$[APQF] = [AED] - [AEP] - [FQD] = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{20} - \frac{a^2}{12} = \frac{7a^2}{60} = 105.$$

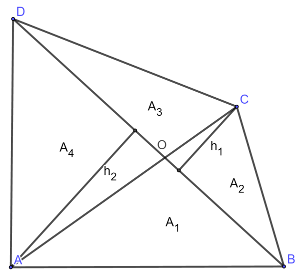
Aufgabe 3.

Es sei S der Scheitel des Winkels und C und D die Schnittpunkte der Geraden mit den Schenkeln. Wir legen durch A noch eine weitere Gerade. Die Schnittpunkte mit den Schenkeln seien E und F dabei sei die Bezeichnung so gewählt, dass C zwischen S und E liegt. Zieht man CG parallel zu DF bis zum Schnittpunkt G mit EF, so ist das Dreieck GAC kongruent zum Dreieck FAD (WSW-Satz). Daraus folgt

$$[SEF] = [SCD] + [CEG] \Rightarrow [SEF] > [SCD].$$

Aufgabe 4.

Die Fläche des gesuchten Rechtecks ist 15.
Es sei nun h_2 die Höhe durch A im Dreieck ABO bzw ADO und h_1 die Höhe durch C im Dreieck BCO bzw. CDO. Dann gilt



$$A_1 = \frac{OB \cdot h_2}{2},$$
$$A_2 = \frac{OB \cdot h_1}{2},$$
$$A_3 = \frac{OD \cdot h_1}{2},$$
$$A_4 = \frac{OD \cdot h_2}{2}.$$

Dann folgt

$$A_1 \cdot A_3 = \frac{OB \cdot OD \cdot h_1 h_2}{4} = A_2 \cdot A_4$$

und daher $A_2 = 4,5$.

Aufgabe 5.

Bringt man die Ungleichung auf gemeinsamen Nenner so erhält man

$$a(a+b+3)(b+2) + 2b(a+1)(a+b+3) leq 3(a+b)(a+1)(b+2).$$

Das vereinfacht sich zu

$$0 \leq (2a-b)^2.$$

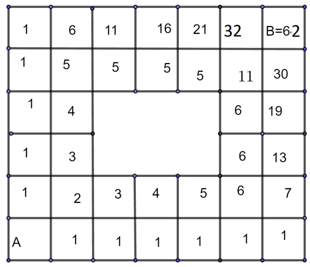
Gleichheit gilt für $2a = b$.

Aufgabe 6.

Es sei oBdA $\alpha = \frac{\beta+\gamma}{2} + 27°$. Mit $\beta + \gamma = 180° - \alpha$ folgt $\alpha = 78°$ und $\beta + \gamma = 102°$. Es kann nun α doppelt so groß wie β bzw. γ sein, oder β doppelt so groß wie γ bzw. genau umgekehrt. Im ersten Fall ergibt sich $\beta = 39°$ und $\gamma = 63°$, im zweiten Fall $\beta = 34°$ und $\gamma = 68°$. Dabei können die Werte von β und γ in beiden Fällen vertauscht werden.

Aufgabe 7.

In nebenstehender Figur ist in jedes Feld die Anzahl der verschiedenen möglichen Wege zu diesem Feld eingetragen. Man erhält auf diese Weise 64 verschiedene Wege von A nach B.



Aufgabe 8.

Mit der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung gilt $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$. Mit den beiden analogen Abschätzungen kann man die Ungleichung verschärfen.
Es genügt also

$$2a^3 + 2b^3 + 2c^3 \geq a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$$

zu zeigen. Wir haben

$$a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2 \iff a^2(a-b) - b^2(a-b) \geq 0 \iff (a-b)^2(a+b) \geq 0,$$

also gilt

$$a^3 + b^3 \geq a^2b + b^2a.$$

Analog gilt

$$b^3 + c^3 \geq b^2c + c^2b \quad \text{und} \quad a^3 + c^3 \geq a^2c + c^2a.$$

Addiert man diese drei Ungleichungen so ergibt sich die Behauptung.
Gleichheit gilt für $a = b = c$.

Aufgabe 9.

Klarerweise kann 0 nicht auftreten. Wenn die Zahl die Ziffer 5 enthält, dann muss die Einerziffer der Zahl 5 sein, sonst wäre sie nicht durch 5 teilbar. Dann ist die Zahl aber ungerade und kann durch keine gerade Zahl teilbar sein. Da die Zahl aber durch sieben verschiedene Ziffern teilbar ist muss sie gerade sein und folglich kann die Zahl auch 5 nicht enthalten. Die Ziffernsumme der jetzt noch möglichen Ziffern ist $1+2+3+4+6+7+8+9 = 40$ Würde als dritte Ziffer 1 nicht auftreten, dann wäre die Ziffernsumme 39 und die Zahl wäre nicht durch 9 teilbar. (Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn die Ziffernsumme durch 9 teilbar ist.) Die Zahl muss also 1 enthalten. Analog argumentiert man bei den Ziffern $2, 3, 6, 7, 8$. Würde die Ziffer 9 nicht auftreten, dann wäre die Ziffernsumme 31 und die Zahl wäre nicht durch 3 teilbar. Die Zahl muss also auch 9 enthalten. Wenn hingegen die Ziffer 4 nicht in der Zahl enthalten ist, dann hat man die Ziffernsumme 36 und die Zahl ist durch 9 (als auch durch 3) teilbar.
Die Zahl enthält also nicht die Ziffern $0, 5$ und 4.
Eine Möglichkeit für so eine Zahl ist 2983176.

Aufgabe 10.

Klarerweise kann 0 nicht auftreten. Wenn die Zahl die Ziffer 5 enthält, dann muss die Einerziffer der Zahl 5 sein, sonst wäre sie nicht durch 5 teilbar. Dann ist die Zahl aber ungerade und kann durch

keine gerade Zahl teilbar sein. Da die Zahl aber durch sieben verschiedene Ziffern teilbar ist muss sie gerade sein und folglich kann die Zahl auch 5 nicht enthalten. Die Ziffernsumme der jetzt noch möglichen Ziffern ist $1+2+3+4+6+7+8+9=40$ Würde als dritte Ziffer 1 nicht auftreten, dann wäre die Ziffernsumme 39 und die Zahl wäre nicht durch 9 teilbar. (Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn die Ziffernsumme durch 9 teilbar ist.) Die Zahl muss also 1 enthalten. Analog argumentiert man bei den Ziffern $2, 3, 6, 7, 8$. Würde die Ziffer 9 nicht auftreten, dann wäre die Ziffernsumme 31 und die Zahl wäre nicht durch 3 teilbar. Die Zahl muss also auch 9 enthalten. Wenn hingegen die Ziffer 4 nicht in der Zahl enthalten ist, dann hat man die Ziffernsumme 36 und die Zahl ist durch 9 (als auch durch 3) teilbar.
Die Zahl enthält also nicht die Ziffern $0, 5$ und 4.
Eine Möglichkeit für so eine Zahl ist 2983176.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

siehe [1, Flanders Junior Olympiads], übersetzt und bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 2.

von Karl Czakler

Aufgabe 3.

Geometrie A-Kurs, ÖMO – Skriptum (Zugriff nur mit ÖMO-Zugang möglich), bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 4.

Skriptum Ungleichungen, ÖMO (Zugriff nur mit ÖMO-Zugang möglich), bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 5.

von Karl Czakler

Aufgabe 6.

von Karl Czakler

Aufgabe 7.

ÖMO Seminar Raach, bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 8.

JRW 1976, Gerd Baron, bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 9.

Aufgabe die im ÖMO Seminar in Raach vorgestellt wurde, bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 10.

siehe [2, JRW 2013 (Karl Czakler)], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Literatur

[1] Art of Problem Solving. `https://artofproblemsolving.com/community`. (aufgerufen am 25.01.2021).

[2] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2009–2018: Aufgaben und Lösungen.* Nova MD, 2019.