52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen Kurs „Mathematik macht Freu(n)de" – Aufgabenblatt für den 29. Jänner 2021

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Josef Pech zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 26. Jänner 2021 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Josef Pech bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 29. Jänner 2021 von 16:20-18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1. Sei $P(x) = (1+x+x^2)^{11} \cdot (2-x-x^2)^{10}$. Denkt man sich den Ausdruck ausmultipliziert, so erhält man ein Polynom $A_n x^n + \ldots + a_1 x + A_0$.

a) Welchen Grad hat das Polynom?

b) Bestimme A_0.

Aufgabe 2. $F(x) = (1 - x + x^2)^{10} \cdot (1 + x - x^2)^{10}$
Bestimme

a) den Grad von $f(x)$

b) A_0

c) A_1

d) die Summe aller Koeffizienten.

Aufgabe 3.
Von der Gleichung $x^3 - A_2 x^2 - 5x + A_0 = 0$ kennt man die Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$. Bestimme die 3. Lösung.

Aufgabe 4. Zeige: Wenn die ganze Zahl α Lösung der Gleichung $A_n x^n + \ldots + A_1 x + A_0 = 0$ ist (wobei alle Koeffizienten $A_n, \ldots, A_1, A_0$ ganzzahlig sind), dann ist α Teiler des konstanten Gliedes A_0.

Aufgabe 5. Für $p(x) = 2x^2 + 3x + C$ gilt: Das Produkt der beiden Nullstellen ist -1. Bestimme C sowie die beiden Nullstellen.

Aufgabe 6.
Sei n eine ganze Zahl. $S(n) = n^0 + n^1 + \ldots + n^{2000}$. Bestimme die Einerziffer von $S(n)$.

Aufgabe 7.
Die Gleichung $x^3 + Ax^2 - 5x + 6 = 0$ hat die Lösung $x_1 = 1$.Bestimme die restlichen Lösungen.

Aufgabe 8.
Ermittle alle natürlichen Zahlen n, für die gilt: Es gibt ein gleichschenkeliges Dreieck ABC mit der Basislänge $|AB| = \sqrt{57}$ und der Schenkellänge $\sqrt{n}$, in dem die Mittelsenkrechten der Schenkel die Basis in drei gleich lange Teilstrecken zerlegen.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1.

b) Welche Zahl x_1 ist für x zu wählen, damit sich $P(x_1) = A_0$ ergibt?

Aufgabe 2.

c) A_1 ist der Koeffizient von x. Wie kommt ein Summand zustande, der x in der 1.Potenz enthält? Wähle aus einer der 20 Faktoren (=Klammern) einen mit x in der 1. Potenz und aus allen anderen Klammern die entsprechende Konstante.

d) Welche Belegung ist für x zu wählen?

Aufgabe 3. Setzt man die Lösung einer Gleichung in die Gleichung ein, so erhält man eine wahre Aussage.

Aufgabe 4. α einsetzen und dann eine Aussage über A_0 machen.

Aufgabe 5. $C = -2$

Aufgabe 6. Für $n = 0$ und für $n = 1$ und ev. für $n = 2$ lässt sich leicht die Antwort geben.
Zur Bestimmung der Einerziffer betrachte S: $\pmod 5$ und $\pmod 2$.

Aufgabe 7. A bestimmen und anschließend $p(x)$ durch $(x - x_1)$ dividieren.

Aufgabe 8. Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden. Die Seitensymmetralen von BC und AC sind jeweils Höhen in einem gleichschenkeligen Dreieck.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

a) $11 \cdot 2 + 10 \cdot 2 = 42$

b) $A_0 = P(0) = (1 + 0 + 0^2)^{11} \cdot (2 - 0 - 0^2)^{10} = 2^{10} = 1024$

Aufgabe 2.

a) 40

b) $A_0 = F(0) = 1$

c)

$$(1 - x + x^2)^{10} \cdot (1 + x - x^2)^{10} = \tag{1}$$

$$(1 - x + x^2) \cdot (1 - x + x^2) \cdot \ldots \cdot (1 - x + x^2) \cdot (1 + x - x^2) \cdot (1 + x - x^2) \ldots \cdot (1 + x - x^2) \cdot (1 + x - x^2) \tag{2}$$

$$\text{Der lineare Summand ergibt sich zu} \tag{3}$$

$$x \cdot (-1 \cdot 1^{19} + 1 \cdot 1^{19}) = 0 \cdot x \tag{4}$$

d) Summe der Koeffizienten $= F(1) = 1$

Aufgabe 3.

$f(1) = 0 \quad 1^3 - A_2 1^2 - 5 \cdot 1 + A_0 = 0 \quad - A_2 + A_0 = 4$
$f(3) = 0 \quad 3^3 - A_2 3^2 - 5 \cdot 3 + A_0 = 0 \quad - 9A_2 + A_0 = -12$
liefert $A_2 = 2 \quad A_0 = 6$
Die dritte Lösung ist $x_3 = -2$

Aufgabe 4.

$A_n \alpha^n + \ldots + A_1 \alpha = -A_0$
$\alpha \cdot (A_n \alpha^n - 1 + \ldots + A_1) = -A_0$.
Daraus folgt, dass α Teiler von A_0 ist.

Aufgabe 5.

Einsatz der Lösungsformel für die qu. Gleichung:
$x_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{9-8C}}{4}$ und das Produkt ergibt
$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-3+\sqrt{})(-3+\sqrt{})}{4\cdot 4}$
Das ergibt $C = -2$, somit $x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = -2$

Aufgabe 6.

Für den ersten Summanden gilt: $n_0 = 1$ Wir betrachten S (i) $mod 2$ und (ii) $\pmod 5$

i) $\pmod 2$
Der erste Summand ist 1. die restlichen 2000 Summanden ergeben in jedem Fall eine gerade Zahl.Also ist $S(n) \equiv 1 \pmod 2$

ii) $\pmod 5$

n	n^2	n^3	n^4	$\sum$
0	0	0	0	0
1	1	1	1	4
2	4	3	1	0
3	4	2	1	0
4	1	4	1	0

Vier aufeinander folgende Summanden liefern in allen Fällen, ausgenommen $n \equiv 1 \pmod 5$, die Summe 0.
Fall $n \equiv 1$:
In diesem Fall beachten wir, dass diese Vierersumme 500 mal vorkommt und somit die Gesamtsumme $S(n) \equiv 1 + 500 \cdot 4 \equiv 1 \pmod 5$ ist.
Für die Einerziffer $E(S(n))$ wissen wir somit, dass sie ungerade und $\equiv 1 \pmod 5$ ist. Also gilt $E(S(n)) = 1$

Aufgabe 7.

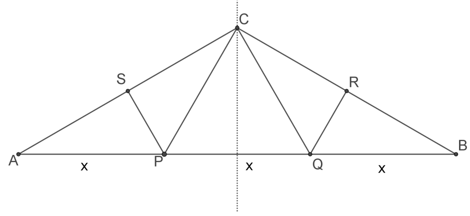
$f(1) = 1^3 + A \cdot 12 - 5 \cdot 1 + 6 = 0$ ergibt $A = -2$. Die beiden restlichen Lösungen erhält man durch Polynomdivision von $f(x)$ durch $(x-1)$ und anschließendem Lösen der quadratischen Gleichung. Günstig: Verwendung des Hornerschemas.

Aufgabe 8.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

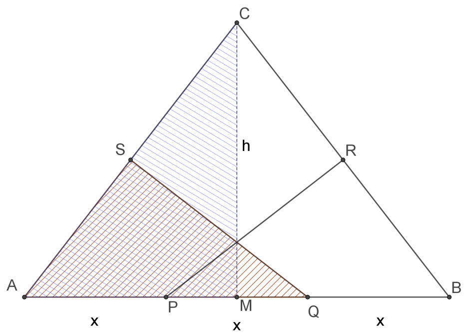
1. s_{BC} schneidet AB in Q

   Das Dreieck BCQ ist gleichschenkelig, weil R der Halbierungspunkt von BC und auch der Fußpunkt der Höhe auf BC ist. Somit ist PQC ein gleichseitiges Dreieck (Innenwinkel $60°$).



$\Rightarrow \measuredangle APS = 60°$ und folglich ist das Dreieck APS ein „halbes“ gleichseitiges Dreieck (Innenwinkel 30°, 60°; 90) und $PS = \frac{x}{2}$.
$\Rightarrow AS = SC = \sqrt{x^2 - (\frac{x}{2})^2} = x\frac{\sqrt{3}}{2}$
$AC = x\sqrt{3} = \sqrt{n}$ mit $x = \frac{\sqrt{57}}{3}$
$\sqrt{n} = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{57}}{3}$
ergibt $n_1 = 3 \cdot \frac{57}{9}$

2. s_{BC} schneidet AB in P



Das rechtwinkelige Dreieck AQS ist ähnlich dem rechtwinkeligen Dreieck AMC.
Somit gilt $\frac{\sqrt{n}}{2} : (2x) = \frac{3x}{2} : \sqrt{n}$

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 5.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 6.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 7.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 8.

siehe [1, 2017/2018], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Literatur

[1] Archivierte Aufgaben der Deutschen Mathematik-Olympiade. `https://www.mathematik-olympiaden.de/moev/index.php/aufgaben/aufgabenarchiv`. (aufgerufen am 08.02.2021).