52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 12. Februar 2021

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Karl Czakler zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 9. Februar 2021 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Karl Czakler bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 12. Februar 2021 von 16:20-18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1. Zu jeder Ecke eines Würfels wird mit roter Farbe eine der Zahlen $1, 2, \ldots, 8$ geschrieben. Zu jeder Kante wird mit grüner Farbe die Summe der beiden Zahlen geschrieben, die bei den Endpunkten dieser Kante stehen.
Ist es möglich die roten Zahlen so anzuordnen, dass keine zwei grüne Zahlen gleich sind?

Aufgabe 2. Welche ganze Zahl ergibt ein Quadrat, wenn man sie zu 100 addiert und ein weiteres Quadrat, wenn man sie zu 168 addiert?

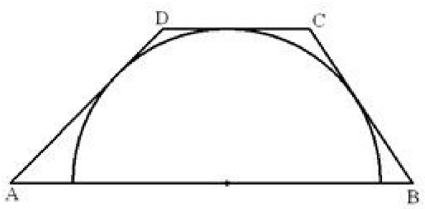
Aufgabe 3. Das Produkt von drei positiven reellen Zahlen sei 1. Die Summe dieser drei Zahlen sei größer als die Summe ihrer Kehrwerte.
Beweise, dass genau eine dieser Zahlen größer als 1 ist.

Aufgabe 4. Sei P ein Punkt innerhalb eines Dreiecks ABC. Wenn man durch den Punkt P drei Geraden parallel zu den Dreiecksseiten zieht, ergeben sich drei Dreiecke mit den Flächeninhalten 9, 25 und 49.
Wie groß ist die Fläche des Dreiecks?

Aufgabe 5. Sei ABC ein spitzwinkliges (nicht gleichschenkliges) Dreieck mit dem Umkreis k, dem Umkreismittelpunkt O und dem Höhenschnittpunkt H. Der von C verschiedene Schnittpunkt der Geraden CO mit k sei G.
Zeige: Das Viereck $AGBH$ ist ein Parallelogramm.

Aufgabe 6.

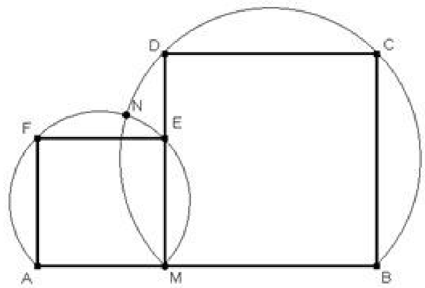
Auf der Basis AB eines Trapezes $ABCD$ liegt der Mittelpunkt eines Halbkreises, der die drei anderen Seiten berührt.



Wie lang ist die Seite BC, wenn die Basis $AB = 14$cm und die Seite $AD = 8$cm ist.

Aufgabe 7.

Sei M ein Punkt der Strecke AB und $AMEF$ bzw. $MBCD$ die Quadrate über den Strecken AM bzw. MB. Weiters sei N der zweite Schnittpunkt der beiden Umkreise dieser Quadrate.



Zeige: Die Geraden AD, BE und CF haben den Punkt N gemeinsam.

Aufgabe 8. Gegeben sind die nichtnegativen reellen Zahlen a und b mit $a + b = 1$.
Man beweise:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} \leq 1$$

Wann gilt Gleichheit in der linken Ungleichung, wann in der rechten?

Aufgabe 9. Es seien x, y nicht negative reelle Zahlen. Man zeige: $(x + y^3)(x^3 + y) \geq 4x^2y^2$. Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 10. Erich addiert zu einer dreistelligen Zahl die drei Ziffern dieser Zahl. Zum Beispiel wird aus der Zahl 216 die Zahl $216 + 2 + 1 + 6 = 225$.
Bestimme die größte dreiziffrige Zahl, die Erich auf diese Weise nicht erhalten kann.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Überlege wie viele Summen (d.h. grüne Zahlen) möglich sind.

Aufgabe 2: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$!

Aufgabe 3: Führe einen indirekten Beweis!

Aufgabe 4: Beachte, dass alle diese Dreiecke zum Dreieck ABC ähnlich sind.

Aufgabe 5: Peripheriewinkelsatz; $\angle GCA = \angle G$.....

Aufgabe 6: Beachte, dass die Tangentenstrecken aus einem Punkt an einen Kreis gleich lang sind.

Aufgabe 7: Es sei N_1 der Schnittpunkt von AD mit BE. Zeige zunächst $N_1 = N$ und dann $N \in CF$.

Aufgabe 8: Jede Ungleichung einzeln lösen. Auf gemeinsamen Nenner bringen! Die Zerlegung $a^3 + b^3 = (a+b)(\ldots)$ verwenden!

Aufgabe 9: Mittelungleichungen!

Aufgabe 10: Einfach nachdenken!

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Wir nehmen an, dass alle grünen Zahlen verschieden sind. Als Summen zweier roter Zahlen können die grünen Zahlen $3, 4, 5, \cdots 15$ auftreten. Da ein Würfel 12 Kanten hat, kann eine dieser 13 Zahlen nicht als Summe auftreten. Die Summe der grünen Zahlen $3+4+\cdots 15$ beträgt 117. Die Summe der roten Zahlen $1+2+\cdots 8$ beträgt 36. Da in jeder Ecke des Würfels drei Kanten zusammenlaufen, ist jede rote Zahl dreimal als Summand für ein grüne Zahl beteiligt. Daher ist die Summe aller grüner Zahlen gleich $3 \cdot 36 = 108$ und mit $117 - 108 = 9$ folgt, dass 9 nicht als grüne Zahl auftreten kann. Also müssen die Summen $15, 14, 13$ und 12 auftreten. Wir zeigen, dass das unmöglich ist.
Für 15 gibt es nur die Möglichkeit $15 = 7+8$. Für 14 gibt es nur die Möglichkeit $14 = 8+6$. Für 13 gibt es die Möglichkeiten $13 = 7+6$ oder $13 = 8+5$. Die erste Möglichkeit scheidet aus, weil 6 und 7 beide Endpunkte einer Kante durch 8 sind und daher nicht beide Endpunkte ein und derselben Kante sein können. Also ist $13 = 8 + 5$. (Die drei Endpunkte der Kanten durch 8 sind daher $5, 6$ und 7.) Versucht man nun 12 als Summe darzustellen, hat man die Möglichkeiten $12 = 7 + 5$ und $12 = 8 + 4$. Beides ist aber unmöglich.
Daher kann man die roten Zahlen nie so anordnen, dass alle grünen Zahlen verschieden sind.

Aufgabe 2.

Für die gesuchte Zahl x gelten folgende Gleichungen:

$$x + 100 = a^2 \quad \text{und} \quad x + 168 = b^2,$$

wobei a und b popsitive ganze Zahlen sind. Subtrahiert man diese beiden Gleichungen so erhält man

$$68 = b^2 - a^2 = (b - a)(b + a).$$

Da $68 = 2^2 \cdot 17$ gilt und $b - a$ und $b + a$ dieselbe Parität aufweisen müssen, folgt $b - a = 2$ und $b + a = 34$. Daraus folgt $b = 18$ und $a = 16$ und somit $x = 156$.

Aufgabe 3.

Seien x, y und z die drei Zahlen. Wegen $xyz = 1$ können nicht alle drei Zahlen größer als 1 und nicht alle drei Zahlen kleiner als 1 sein.
Wir führen nun einen indirekten Beweis und nehmen an, dass zwei Zahlen größer als 1 sind. Es sei also oBdA. $x > 1$ und $y > 1$. Dann gilt

$$0 < (x - 1)(y - 1)(1 - z) = xy + yz + zx - xyz - (x + y + z) + 1 = xy + yz + zx - (x + y + z).$$

Mit der Voraussetzung

$$x + y + z > \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = xy + yz + zx.$$

folgt

$$xy + yz + zx - (x + y + z) < 0.$$

Also hat man mit

$$0 < (x - 1)(y - 1)(1 - z) < 0$$

einen Widerspruch. Es können daher keine zwei Zahlen größer als 1 sein.

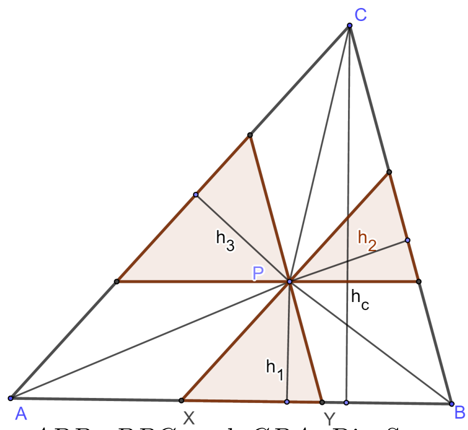
Aufgabe 4.

Die Parallele zu AC durch P schneide AB in X und die Parallele zu BC durch P schneide AB in Y. Das Dreieck XYP ist dann zum Dreieck ABC ähnlich. Die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Längen. Bezeichnet man den Flächeninhalt des Dreiecks XYP mit A_1, den Flächeninhalt des Dreiecks ABC mit F, die Höhe de Dreiecks XYP durch P mit h_1 und mit h_c die Höhe des Dreiecks ABC durch C.
Dann gilt

$$h_1 : h_c = \sqrt{A_1} : \sqrt{F} \quad \text{also gilt} \quad h_1 = \frac{h_c \cdot \sqrt{A_1}}{\sqrt{F}}$$

Analog gilt mit den entsprechenden anderen Bezeichnungen

$$h_2 = \frac{h_a \cdot \sqrt{A_2}}{\sqrt{F}} \quad \text{und} \quad h_3 = \frac{h_b \cdot \sqrt{A_3}}{\sqrt{F}}.$$



Wir zerlegen nun das Dreieck ABC in die Dreiecke APB, BPC und CPA. Die Summe der Flächeninhalte dieser drei Dreiecke ist gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks ABC, also

$$AB \cdot h_1 + BC \cdot h_2 + CA \cdot h_3 = 2 \cdot F.$$

Setzt man obige Beziehungen hier ein, so erhält man

$$AB \cdot \frac{h_c \cdot \sqrt{A_1}}{\sqrt{F}} + BC \cdot \frac{h_a \cdot \sqrt{A_2}}{\sqrt{F}} + CA \cdot \frac{h_b \cdot \sqrt{A_3}}{\sqrt{F}} = 2 \cdot F.$$

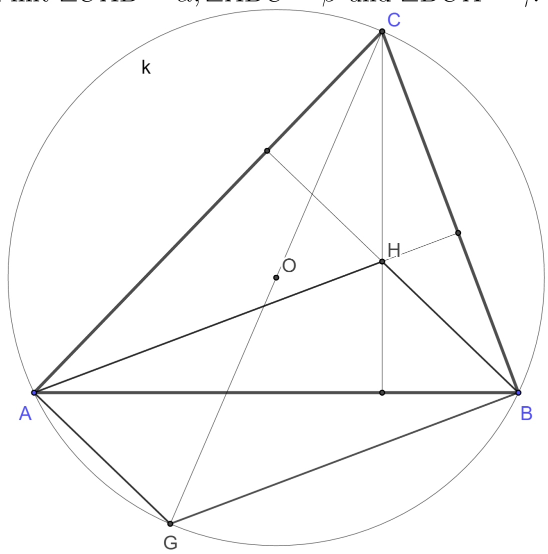
Daraus folgt

$$\frac{\sqrt{A_1}}{\sqrt{F}} + \frac{\sqrt{A_2}}{\sqrt{F}} + \frac{\sqrt{A_3}}{\sqrt{F}} = 1.$$

Durch Einsetzen der Werte für A_1, A_2 und A_3 ergibt sich $F = 225$

Aufgabe 5.

Wir bezeichnen die Winkel des Dreiecks wie üblich mit $\angle CAB = \alpha, \angle ABC = \beta$ und $\angle BCA = \gamma$.



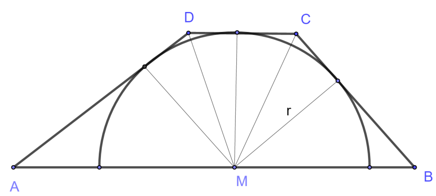
Mit dem Peripheriewinkelsatz folgt

$$90^\circ - \beta = \angle OCA = \angle GCA = \angle GBA.$$

Da auch $\angle HAB = 90^\circ - \beta$ gilt sind die Strecken AH und BG parallel. Analog zeigt man, dass die Strecken AG und BH parallel sind und damit ist $AGBH$ ein Parallelogramm.

Aufgabe 6.

Sei M auf AB der Mittelpunkt dew Halbkreises. Wir zerlegen das Trapez in die Dreiecke AMD, CMD und BMC. Die Summe der Flächeninhalte dieser drei Dreiecke ist gleich dem Flächeninhalt des Trapezes. Alle diese drei Dreiecke haben eine Höhe die gleich dem Radius r des Halbkreises ist. Daher gilt mit der Flächenformel für das Dreieck und der Flächenformel für das Trapez



$$AD \cdot r + CD \cdot r + BC \cdot r = (AB + CD) \cdot r.$$

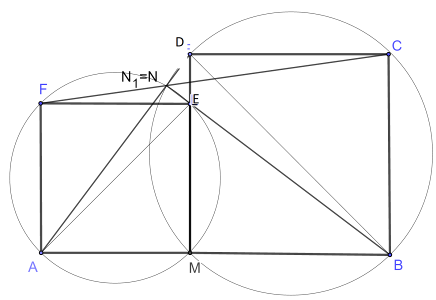
Daraus folgt

$$AD + CD + BC = AB + CD, \quad \text{also} \quad AD + BC = AB.$$

Daher ist $BC = 6\text{cm}$.

Aufgabe 7.

Die Dreiercke AMD und EMB sind kongruent und können durch eine Drehung um 90° um den Punkt M ineinander übergeführt werden. Daher stehen die Geraden AD und BE aufeinander normal. Ihr Schnittpunkt sei N_1. Da BD bzw. AE Durchmesser der Umkreise sind, folgt mit dem Satz von Thales, dass N_1 auch auf beiden Kreisen liegt.



Es gilt also $N = N_1$. Mit dem Peripheriewinkelsatz gilt

$$\angle DNC = \angle DMC = 45^\circ \quad \text{und} \quad \angle FNA = \angle FEA = 45^\circ.$$

Daraus folgt aber, dass die Punkte F, N und C auf einer Geraden liegen und somit alle drei Geraden durch den Punkt N gehen.

Aufgabe 8.

Mit der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung gilt

$$x + y^3 \geq 2\sqrt{xy^3} \quad \text{und} \quad x^3 + y \geq 2\sqrt{x^3y}.$$

Daraus folgt

$$(x + y^3)(x^3 + y) \geq 4\sqrt{xy^3x^3y} = 4x^2y^2$$

.

Aufgabe 9.

Mit der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung gilt

$$x + y^3 \geq 2\sqrt{xy^3} \quad \text{und} \quad x^3 + y \geq 2\sqrt{x^3y}.$$

Daraus folgt

$$(x + y^3)(x^3 + y) \geq 4\sqrt{xy^3x^3y} = 4x^2y^2$$

.

Aufgabe 10.

$999 = 981 + 9 + 8 + 1, \quad 998 = 976 + 9 + 7 + 6, \quad 997 = 980 + 9 + 8 + 0, \quad 996 = 975 + 9 + 7 + 5$
Die Zahl 995 ist die größte dreiziffrige Zahl, die man so nicht erhalten kann.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

siehe [1, 2002], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 2.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.

siehe [4,], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 4.

siehe [5, 1978], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 5.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 6.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 7.

siehe [3, 1959], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 8.

siehe [2, 2017], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 9.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 10.

Aufgabe die im Oemo Seminar in Raach vorgestellt wurde, bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Literatur

[1] Art of Problem Solving. https://artofproblemsolving.com/community. (aufgerufen am 13.02.2021).

[2] Gesammelte Bewerbsaufgaben (und Lösungen) der österreichischen Mathematikolympiade seit 2014. https://oemo.at/OeMO/aufgaben/. (aufgerufen am 13.02.2021).

[3] Internationale Mathematik-Olympiade. https://www.imo-official.org/problems.aspx. Alle IMO - Angaben und die meisten IMO-Shortlists vergangener Jahre (aufgerufen am 13.02.2021).

[4] Arthur Engel. *Problem-solving strategies (Problem Books in Mathematics)*. Springer, 1998.

[5] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 1990–1999: Aufgaben und Lösungen*. öbv, 1999.