52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 19. Februar 2021

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Josef Pech zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 16. Februar 2021 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Josef Pech bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 19. Februar 2021 von 16:20-18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1. Die Punkte A, B, C, D liegen im Gegenuhrzeigersinn so auf einem Kreis, dass AC normal auf BD steht. Dadurch werden vier Bögen $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{DA}$ des Kreises markiert. Zeige, dass für die Bogenlängen gilt: $\widehat{AB} + \widehat{CD} = \widehat{BC} + \widehat{DA}$.

Aufgabe 2. Löse in den ganzen Zahlen die Gleichung

$$x^2 = 8 \cdot y + 1 \quad \text{mit} \quad x > y \geq 0.$$

Aufgabe 3. In einem Dreieck ABC gilt $c = 60$; $b = 80$; $W_a = 24$. Dabei ist W_a der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale w_α des Winkels α mit BC. Bestimme a.

Aufgabe 4. In einem nichtgleichseitigen Dreieck gelte $a+b = 2 \cdot c$. Zeige, dass die Verbindungsgerade des Inkreismittelpunkts I mit dem Schwerpunkt S parallel zu c ist.

Aufgabe 5. Ein Radfahrer, der mit konstanter Geschwindigkeit fährt, erreicht zu einem Zeitpunkt eine Kilometermarke, die aus 2 verschiedenen Ziffern besteht. Nach einer gewissen Zeit Δt erreicht er eine weitere Marke, die aus denselben Ziffern-jedoch in umgekehrter Reihenfolge- besteht. Nachdem er nochmal dasselbe Zeitintervall Δt gefahren ist, kommt er erneut zu einer Kilometermarke, die aus denselben zwei Ziffern und einer weiteren Ziffer besteht. Um welche Kilometermarken handelt es sich?

Aufgabe 6.
Wie viele natürliche Zahlen (beginnend mit 1, 2, 3, ...) muss man addieren, bis sich erstmals eine dreiziffrige Zahl ergibt, deren Ziffern alle gleich sind?

Aufgabe 7.
Auf der Winkelsymmetrale des Winkels $\alpha = 60°$ liegt der Punkt P mit $SP = 5$ (S ... Scheitel des Winkels α). Durch P geht die Gerade g, deren Schnittpunkte mit den Schenkeln die Punkte A und B sind. Wie groß muss SA gewählt werden, damit der Inhalt des Dreiecks SAB minimal ist?

Aufgabe 8. Löse folgendes Gleichungssystem $\left\{\begin{array}{c} x + y + z = 2 \\ xy + yz + zx = -5 \\ xyz = -6 \end{array}\right\}$

Aufgabe 9. Bestimme alle Primzahlen p und q, für die $p^2 - 2 \cdot q^2 = 1$ gilt.

Aufgabe 10. Löse das System

$$\left\{\begin{array}{c} a+b+c=0 \\ 2(a^2+b^2+c^2) = \ 21 \\ \frac{10}{a} + \ \frac{10}{b} + \ \frac{10}{c} = \ 21 \end{array}\right\}$$

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Stelle einen Zusammenhang zwischen dem Bogen und dem entsprechenden Zentriwinkel her.

Aufgabe 2. x kann nicht viel größer als y sein.

Aufgabe 3.
Zeichne eine Parallele zu AB in C ein.

Aufgabe 4. Verwende den Satz von Aufgabe 3) und die Eigenschaft des Schwerpunkts im Dreieck.

Aufgabe 5. Probieren hilft.

Aufgabe 6. Hier ist die Formel für die Summe $S_n = 1 + 2 + \ldots + n$ zu verwenden. Für eine Zahl der Form $[xxx]_{10}$ kann man sofort Teiler angeben.

Aufgabe 7. Eines der möglichen Dreiecke ist ausgezeichnet.

Aufgabe 8. Das auf Discord zur Verfügung stehende Blatt über elementarsymmetrische Funktionen hilft.

Aufgabe 9. Das auf Discord zur Verfügung stehende Blatt über elementarsymmetrische Funktionen hilft.

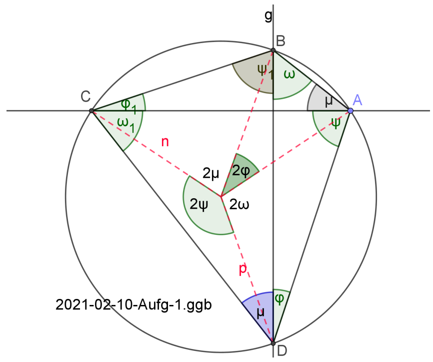
Aufgabe 10. Wie Aufgabe 8)

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

M sei der Kreismittelpunkt. Dann gilt (Peripheriewinkelsatz):



$$
\begin{aligned}
\varphi &:= \angle BCA = \angle BDA \quad &\Rightarrow \quad &\angle BMA = 2\varphi \qquad &(1)\\
\omega &:= \angle DCA = \angle DBA \quad &\Rightarrow \quad &\angle DMA = 2\omega \qquad &(2)\\
\mu &:= \angle CDB = \angle CAB \quad &\Rightarrow \quad &\angle CMB = 2\mu \qquad &(3)\\
\psi &:= \angle DAC = \angle DBC \quad &\Rightarrow \quad &\angle DMC = 2\psi \qquad &(4)
\end{aligned}
$$

Da $\varphi+\psi = 90° \Rightarrow 2\varphi+2\psi = 180°$. Das entspricht $\widehat{AB}+\widehat{CD}$

Aufgabe 2.

Es gilt

$$
\begin{aligned}
x &\geq y+1\\
x^2 &\geq (y+1)^2\\
x^2 &= 8y+1 \geq y^2+2y+1\\
0 &\geq y^2-6y = y(y-6)
\end{aligned}
$$

Da $y \geq 0$, muss $y-6 \leq 0$ sein. $\Rightarrow 0 \leq y \leq 6$.
Dazu ergeben sich die Lösungen $\{(1;0);(3;1);(5;3);(7;6)\}$

Aufgabe 3.

Wir verwenden den Satz:

Die Winkelsymmetrale teilt die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

Sei $x = BW_a$ und $y = Wa_C$. Dann gilt $x : y = c : b$.
Verwenden wir die angegebenen Werte, so ergibt sich
$24 : y = 60 : 80$ und somit $a = x + y = 56$

Aufgabe 4.

Der Beweis wird mit Hilfe der Formel für den Inkreisradius ρ geführt.

$$A_{ABC} = \frac{\rho}{2}\cdot(a+b+c) = \frac{\rho}{2}\cdot(2c+c) = \frac{\rho}{2}\cdot 3c = c\cdot\frac{h_c}{2}$$

Wir erhalten $\rho = \frac{h_c}{3}$
Das bedeutet, dass der Inkreismittelpunkt I in der „Höhe“ $\frac{h_c}{3}$ (als Abstand von AB) liegt. Dasselbe gilt für den Schwerpunkt S(S teilt die Schwerlinien im Verhältnis $1:2$). Also liegen die beiden Punkte I und S auf einer Parallelen zu AB.

Aufgabe 5.

Marke	a	b	c
km-Zahl	$[xy]$	$[yx]$	$[1..]$

Dazwischen liegt Δ_1 Δ_2

Bei dieser Bezeichnung muss $y > x$ sein! Die Hunderterstelle von c muss 1 sein. Leider ist unklar, ob 1 bei a bzw. b schon vorgekommen ist. Wir betrachten beide Fälle:

- 1. Fall: $x \neq 1$ und $y \neq 1$
  Wenn $c = [1xy]$, dann $\Delta_2 = 100 + 10x + y - (10y + x) = 100 - 9y + 9x = \Delta_1 = 9y - 9x$.
  Ein Widerspruch (da 9 kein Teiler von 100 ist)!
  Wenn $c = [1yx]$, dann $\Delta_2 = 100 + 10y + x - (10y + x) = 100$ Widerspruch ($\Delta_2 < 100$). Also kommt 1 schon bei den Marken a und b vor.

- 2. Fall: $x = 1$ oder $y = 1$
  Da $y > x$ gilt, muss folglich $x = 1$ sein.
  Die Überprüfung der möglichen Fälle führt auf

$$a = 16; \quad b = 61; \quad c = 106$$

Aufgabe 6.

Die Formel für

$$1 + 2 + \ldots + n = (\frac{1+n) \cdot n}{2}$$

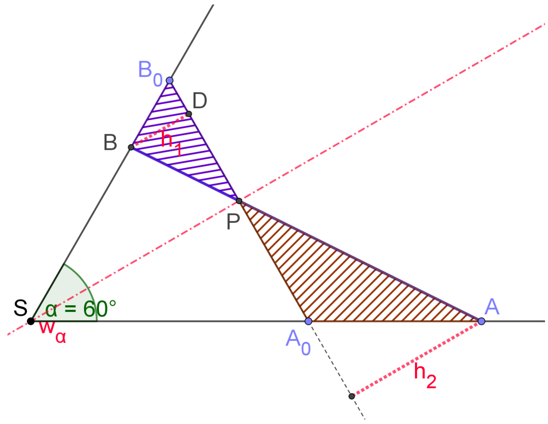
wird verwendet.Die Zahl lautet $[xxx]_{10} = 100x + 10x + x = x \cdot 111 = x \cdot 3,37$

$$\frac{(1+n) \cdot n}{2} = x \cdot 3,37 \quad \text{bzw.} \quad (1+n) \cdot n = 2 \cdot x \cdot 3,37$$

Wir suchen nur nach der kleinsten Lösung. Für $x = 6$ ist die Klammer die um 1 kleinere Zahl neben 37.
$(2 \cdot 6 \cdot 3) \cdot 37$ ergibt für $n = 36$ die gesuchte Zahl.

Aufgabe 7.

SA_0B_0 sei gleichseitig. A ist auf dem Scheitel so gewählt, dass $SA > SA_0$. Dann ist der Inhalt des Dreiecks PA_0A größer als der Inhalt des Dreiecks PB_0B. Damit ist der Inhalt des Dreiecks SAB größer als der Inhalt des Dreiecks SA_0B_0. Da SP die Höhe im gleichseitigen Dreieck ist, muss $SP = 5 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Das ergibt $a = \frac{10}{\sqrt{3}}$.



Aufgabe 8.

Für jede Zeile im Gleichungssystem gilt: Bei beliebiger Vertauschung der drei Größen x, y, z ergibt sich dieselbe Gleichung.
Wir erhalten $p_1 = 2$; $p_2 = -5$; $p_3 = -6$.
Das Ersatzpolynom ist $t^3 - 2t^2 + (-5)t–(-6) = 0$
$t^3 - 2t^2 - 5t + 6 = 0$ mit den Lösungen $t_1 = 1$; $t_2 = -2$; $t_3 = 3$.
Die Lösungsmenge besteht somit aus $(1; -2; 3)$ und allen Permutationen.

Aufgabe 9.

$p = 2$ liefert keine Lösung.
Also: $p > 2$ und somit ist p ungerade.

$$p^2 - 1 = 2q^2$$
$$(p-1) \cdot (p+1) = 2q^2$$

$\Rightarrow 2|p-1$ und folglich auch $2|p+1 \quad \Rightarrow 4|p^2-1$ (sogar 8 ist Teiler!). Deshalb muss q^2 durch 2 teilbar sein. Also $2|q$ und folglich ist $q = 2$ und $p = 3$.

Aufgabe 10.

Alle drei Gleichungen sind symmetrisch.
$p_1 = 0$
$s_2 = \frac{21}{2}$
Aus $\frac{10}{a} + \frac{10}{b} + \frac{10}{c} = 21$ erhält man $10 \cdot p_2 = 21p_3$
Es gilt allgemein $s_2 = p_1^2 - 2p_2$.
Das Ersatzpolynom lautet $t^3 - p_1t^2 + p_2t–p3 = 0$
Das ergibt $4t^3 - 21t + 10 = 0$
Die Lösungen sind $(2; \frac{1}{2}; -\frac{5}{2})$ und alle Permutationen.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.

siehe [1, 1981], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 5.

Geocache-Aufgabe, leicht verändert von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 6.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 7.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 8.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 9.

siehe [2, S.131], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 10.

H. Gstöttner Mariazell Kursleiterseminar 2001, bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Literatur

[1] Archivierte Aufgaben der Deutschen Mathematik-Olympiade. `https://www.mathematik-olympiaden.de/moev/index.php/aufgaben/aufgabenarchiv`. (aufgerufen am 23.02.2021).

[2] Arthur Engel. *Problem-solving strategies (Problem Books in Mathematics)*. Springer, 1998.