52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 26. Februar 2021

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Karl Czakler zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 23. Februar 2021 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Karl Czakler bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 26. Februar 2021 von 16:20-18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1.
Man bestimme alle ganzen Zahlen x, für die gilt:

$$\left\lfloor \frac{x}{20} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{18} \right\rfloor = 3$$

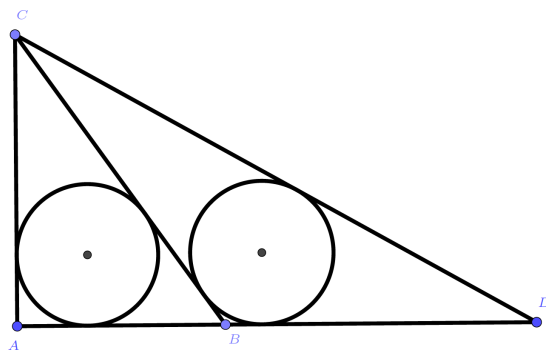
Aufgabe 2. Es seien x und y positive reelle Zahlen mit $x + y = 4$. Beweise

$$\frac{(2x+1)^2}{x} + \frac{(2y+1)^2}{y} \geq 25$$

Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 3.

In einem rechtwinkeligen Dreieck ABC haben die Katheten die Längen $\overline{AB} = 6$ und $\overline{AC} = 8$. Wie weit muss AB über B hinaus verlängert werden, damit die Dreiecke ABC und BDC kongruente Inkreise besitzen?



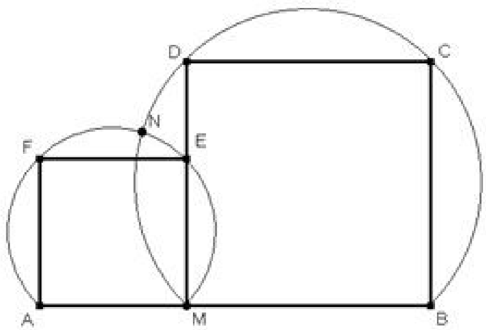
Aufgabe 4. Man zeige: Es gibt keine positive rationale Zahl x mit $x^{\lfloor x \rfloor} = \frac{9}{2}$
($\lfloor x \rfloor$ ist die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x)

Aufgabe 5. Bestimme alle Paare (a, b) ganzer Zahlen für die das Quadrat ihres Produkts gleich dem Doppelten der Summe ihrer Quadrate ist.

Aufgabe 6. Beweise, dass für keine natürliche Zahl n ein Ausdruck der Form $n^2 + 11n + 30$ eine Quadratzahl sein kann.

Aufgabe 7.

Sei M ein Punkt der Strecke AB und $AMEF$ bzw. $MBCD$ die Quadrate über den Strecken AM bzw. MB. Weiters sei N der zweite Schnittpunkt der beiden Umkreise dieser Quadrate.



Zeige: Die Geraden AD , BE und CF haben den Punkt N gemeinsam.

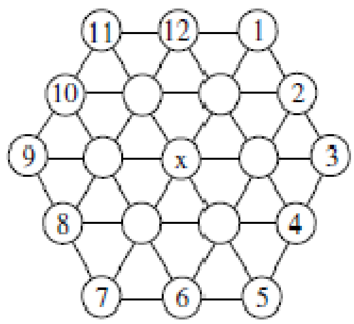
Aufgabe 8. Beweise, dass es in jeder Menge M von fünf positiven ganzen Zahlen mindestens zwei Zahlen gibt, deren Summe oder deren Differenz durch 7 teilbar ist.

Aufgabe 9. Ermittle alle positiven ganzen Zahlen n für die gilt:

- n lässt bei der Division durch 3 den Rest 1.
- n^2 lässt bei der Division durch 11 den Rest 1.
- $100 < n < 200$

Aufgabe 10.

In die Kreise der Abbildung lassen sich reelle Zahlen so eintragen, dass in die Randkreise die angegebenen Zahlen kommen und dass in jedem der sieben inneren Kreise jeweils das arithmetische Mittel der sechs benachbarten Kreise steht.



Man bestimme welche Zahl x im mittleren Kreis steht.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Überlege welche positive ganzen Zahlen möglich sind. Probiere einige Werte aus!

Aufgabe 2: Ausquadrieren, Umformen und AM-GM- Ungleichung verwenden.

Aufgabe 3: Verwende die Formel für den Inkreisradius $\rho = \frac{A}{s}$, wobei A die Fläche des Dreiecks und s der halbe Umfang ist.

Aufgabe 4: Fallunterscheidungen: $x \geq 3$, $x < 2$ und $2 \leq x < 3$.

Aufgabe 5: Entsprechende Gleichung aufstellen und geeignet umformen. Rechteckszerlegung!

Aufgabe 6: Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen kann keine Quadratzahl liegen!

Aufgabe 7: Es sei N_1 der Schnittpunkt von AD mit BE. Zeige zunächst $N_1 = N$ und dann $N \in CF$.

Aufgabe 8: Betrachte die Reste bei der Division durch 7.

Aufgabe 9: Untersuche die quadratischen Reste modulo 11

Aufgabe 10: Belege die freien Felder mit den Variablen a, b, c, d, e, f und stelle entsprechende Gleichungen auf!

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Für $x \geq 40$ sind beide Summanden größer gleich 2, also keine Lösungen. Für $x < 36$ sind beide Summanden kleiner gleich 1, also auch keine Lösungen. Mit $36, 37, 38$ und 39 hat man dann alle gesuchten positiven ganzen Zahlen.

Aufgabe 2.

Die Ungleichung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}
\frac{4x^2+4x+1}{x} + \frac{4y^2+4y+1}{y} &\geq 25 \\
4x+4+\frac{1}{x}+4y+4+\frac{1}{y} &\geq 25 \\
4(x+y)+8+\frac{1}{x}+\frac{1}{y} &\geq 25 \\
\frac{1}{x}+\frac{1}{y} &\geq 1 \\
\frac{x+y}{xy} &\geq 1 \\
4 &\geq xy
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt aber unmittelbar mit der arithmetisch- geometrischen Mittelungleichung

$$2 = \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}.$$

Gleichheit gilt für $x = y = 2$.

Aufgabe 3.

Es sei $x = BD$ und ρ der Inkreisradius. Wir verwenden die Formel für den Inkreisradius $\rho = \frac{A}{s}$ eines Dreiecks, wobei A die Fläche des Dreiecks und s der halbe Umfang ist.
Mit dem Satz von Pythagoras folgt $BC = 10$ und $DC = \sqrt{(6+x)^2+64}$. Es gilt

$$\rho = \frac{A}{s} = \frac{24}{12} = 2 = \frac{\frac{8x}{2}}{\frac{x+10+\sqrt{(6+x)^2+64}}{2}}.$$

Daraus folgt

$$x + 10 + \sqrt{x+6)^2+64} = 4x$$

und daraus berechnet sich $x = BD = 9$.

Aufgabe 4.

Ist $x \geq 3$, also auch $\lfloor x \rfloor \geq 3$, so ist $x^{\lfloor x \rfloor} \geq 3^3 = 27 > \frac{9}{2}$.
Ist$x < 2$, also auch $\lfloor x \rfloor < 2$, so ist $x^{\lfloor x \rfloor} < 2^2 = 4 < \frac{9}{2}$.
Es bleibt $2 \leq x < 3$ zu betrachten. Hier ist $\lfloor x \rfloor = 2$. Es soll $x^2 = \frac{9}{2}$, also $x = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}$. Dieses x liegt zwar zwischen 2 und 3, ist aber keine rationale Zahl. Daher gibt es keine Lösung.

Aufgabe 5.

Es gilt

$$(ab)^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Das ist äquivalent zu

$$a^2b^2 - 2a^2 - 2b^2 = 0$$
$$(a^2 - 2)(b^2 - 2) = 4.$$

Das Produkt der beiden ganzzahligen Faktoren $(a^2 - 2)$ und $b^2 - 2)$ ist 4. Sind beide negativ, so überlegt man ich leicht, dass $a^2 - 2 = -2$ und $b^2 - 2 = -2$ die einzige Möglichkeit ist und wir erhalten als Lösung das Zahlenpaar $(0, 0)$.
Sind beide Faktoren positiv, so ist $a^2 - 2 = 2$ und $b^2 - 2 = 2$ die einzige Möglichkeit und man erhält die Lösungen $(2, 2), (2, -2).(-2, 2)$ und $-2, -2)$.

Aufgabe 6.

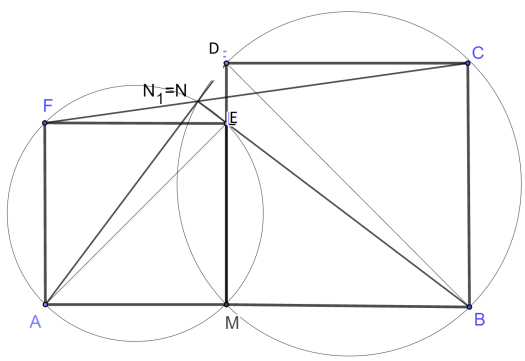
Es gilt:

$$(n + 5)^2 = n^2 + 10n + 25 < n^2 + 11n + 30 < n^2 + 12n + 36 = (n + 6)^2.$$

Daher liegt $n^2 + 10n + 25$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen und kann daher selbst keiner Quadatzahl sein.

Aufgabe 7.

Die Dreiercke AMD und EMB sind kongruent und können durch eine Drehung um $90°$ um den Punkt M ineinander übergeführt werden. Daher stehen die Geraden AD und BE aufeinander normal. Ihr Schnittpunkt sei N_1. Da BD bzw. AE Durchmesser der Umkreise sind, folgt mit dem Satz von Thales, dass N_1 auch auf beiden Kreisen liegt. Es gilt also $N = N_1$.



Mit dem Peripheriewinkelsatz gilt

$$\angle DNC = \angle DMC = 45° \quad \text{und} \quad \angle FNA = \angle FEA = 45°.$$

Daraus folgt aber, dass die Punkte F, N und C auf einer Geraden liegen und somit alle drei Geraden durch den Punkt N gehen.

Aufgabe 8.

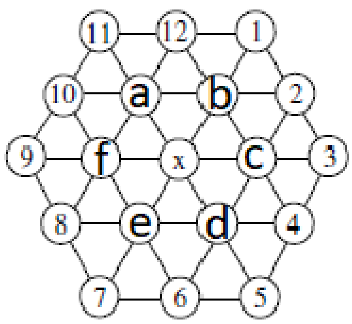
Falls M zwei Zahlen enthält, die bei der Division durch 7 denselben Rest lassen, so ist die Diferenz beider Zahlen durch 7 teilbar. Läst nun jede Zahl aus M einen anderen Rest bei der Division durch 7, dann ist die Menge R der auftretenden Reste eine fünfelementige Teilmenge der Menge $0, 1, 2, \ldots, 6$. Wir betrachten die Restpaare $(1, 6)$, $2, 5)$ und $3, 4$. Von diesen drei Paaren können höchstens zwei einen nicht in R befindlichen Rest enthalten, d.h. R enthält mindestens ein Paar dessen beide Reste in R liegen. Damit ist aber gezeigt, dass es in M zwei Zahlen gibt, deren Summe durch 7 teilbar ist.

Aufgabe 9.

Aus $n^2 \equiv 1 \pmod{11}$ folgt $n \equiv 1 \pmod{11}$ oder $n \equiv -1 \pmod{11}$, also $n = 11k + 1$ oder $n = 11k + 10$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Also gilt $n \equiv 2k + 1 \pmod 3$. Damit $n \equiv 1 \pmod 3$ gilt, muss $k = 3r$ mit $r \in \mathbb{Z}$ gelten. Also haben wir $n = 33r + 1$ oder $n = 33r + 10$.
Aus $100 < 33r + 1 < 200$ folgt $r = 4, 5$ und $r = 6$ und man erhält die Lösungen $133, 166$ und 199.
Aus $100 < 33r + 10 < 200$ folgt $r = 3, 4$ und $r = 5$ und man erhält die Lösungen $109, 142$ und 175.

Aufgabe 10.

Wir beschriften die freien Felder mit a, b, c, d, e und f. Dann hat man folgende Gleichungen



$$\begin{aligned}
10 + 11 + 12 + b + x + f &= 6a \\
12 + 1 + 2 + c + x + a &= 6b \\
2 + 3 + 4 + d + x + b &= 6c \\
4 + 5 + 6 + e + x + b &= 6d \\
6 + 7 + 8 + f + x + d &= 6e \\
8 + 9 + 10 + a + x + e &= 6f
\end{aligned}$$

Addiert man diese sechs Gleichungen so erhält man $120 + 6x + 2(a + b + c + d + e + f) = 6(a + b + c + d + e + f)$ und mit $6x = a + b + c + d + e + f$ folgt $x = \frac{20}{3}$.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.

Von Gerhard Kirchner, bearbeitet vom Karl Czakler und dem MmF-Team

Aufgabe 4.

siehe [3, 2002], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 5.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 6.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 7.

siehe [2, 1959], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 8.

siehe [1], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 9.

siehe [1], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 10.

siehe [1], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Literatur

[1] Aufgaben zur Mathematik Olympiade. `https://www.olympiade-mathematik.de/`. (aufgerufen am 23.02.2021).

[2] D. Djukić, V. Janković, I. Matić, and N. Petrović. *The IMO Compendium: A Collection of Problems Suggested for International Mathematical Olympiads 1959-2009*. Springer, 2011.

[3] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2000–2008: Aufgaben und Lösungen*. Nova MD, 2018. Auflage 1.3.