52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 05. März 2021

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Josef Pech zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 02. März 2021 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Josef Pech bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 05. März 2021 von 16:20-18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1. In einem Parallelogramm $ABCD$ liege der Mittelpunkt der Seite CD auf der Winkelsymmetrale des Winkels $\alpha = \angle BAD$. Man zeige, dass der Winkel $\angle AMB$ ein rechter Winkel ist.

Aufgabe 2. Bestimme alle natürlichen Zahl n, die durch 21 teilbar sind und genau 21 Teiler haben?

Aufgabe 3. Man zeige, dass die Gleichung $a^2+b^2+c^2 = 8d+7$ keine Lösung in den ganzen Zahlen besitzt.

Aufgabe 4. Für welche ganze Zahl n ist $(n-1)^2$ Teiler des Ausdrucks $n^4 - n^2 + n - 1$?

Aufgabe 5. Gegeben ist die Gleichung $x^8 - 2 = 7y$. Für welche positiven ganzen Zahlen x ist y eine ganze Zahl?

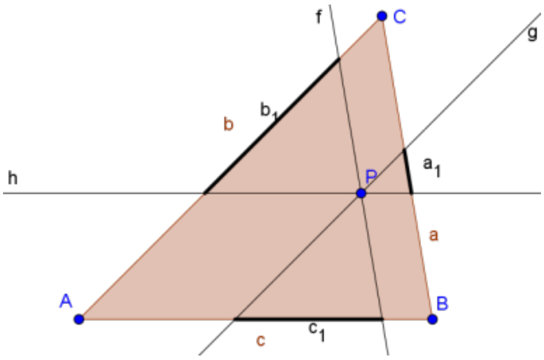
Aufgabe 6. Seien a und b positive ganze Zahlen. Ein Rechteck (a mal b) wird mit quadratischen Steinen ($1x1$) belegt. Welche Zahlen sind für a und b möglich, damit es genauso viele Randsteine wie innenliegende Steine gibt?

Aufgabe 7.
$ABCD$ sei ein konvexes Viereck mit Inhalt 1. Auf den Seiten sind vier Punkte markiert derart, dass:
K liegt auf AB mit $AK : KB = 2 : 1$
L liegt auf BC mit $BL : LC = 1 : 3$
M liegt auf CD mit $CM : MD = 1 : 1$
N liegt auf DA mit $DN : NA = 1 : 5$.
Bestimme den Inhalt des Sechsecks $AKLCMN$.

Aufgabe 8.

In einem beliebigen Punkt P im Inneren des Dreiecks ABC werden die Parallelen zu den Seiten a, b, c gelegt. Die entsprechenden Abschnitte auf den Seiten seien a', b', c'. Zeige:

$$\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c}{c} = 1$$



Aufgabe 9. Löse in den ganzen Zahlen $2^{x-3} = 1 + 3^y$

Aufgabe 10. Zeige: Wenn für ganze Zahlen x, y die Gleichung $x \cdot (x+1) \cdot (x+4) \cdot (x+5) = y^2$ gilt, dann ist $y = 0$.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Beachte Parallelwinkel!

Aufgabe 2. 1 und n sind auch Teiler von n.
Wie lässt sich die Anzahl der Teiler einer Zahl aus deren Primfaktorzerlegung bestimmen?

Aufgabe 3. Betrachte die Gleichung (mod 8).

Aufgabe 4. Der Ausdruck lässt sich faktorisieren. Dann Teilbarkeits-regeln anwenden.

Aufgabe 5. Gleichung (mod 7) betrachten.

Aufgabe 6. Als Randstein gilt ein Stein, der mindestens eine Kante am Rand des Rechtecks hat.
Ein innenliegender Stein hat keine Kante am Rand des Rechtecks.
Die sich ergebende Gleichung (in 2 Unbekannten a und b) zerlegen und alle Fälle diskutieren.

Aufgabe 7. Für zwei Dreiecke mit derselben Höhe h gilt: Die Inhalte verhalten sich wie die auf h normal stehenden Seiten.

Aufgabe 8. Hier sind 3 Parallelogramme und vier Dreiecke zu sehen. Ähnlichkeit einsetzen!

Aufgabe 9. mod 3

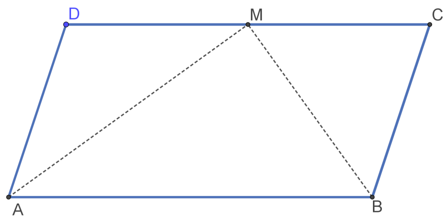
Aufgabe 10. Die beiden mittleren Klammern zusammenfassen und ebenso die beiden äußeren.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

$\angle BAM = \angle DMA = \frac{\alpha}{2} = \angle DAM$ (gleichgroße Parallelwinkel) Also ist das Dreieck AMD gleichschenkelig. $\Rightarrow AD = DM = BC$ (da M Mittelpunkt der Seite CD) und folglich ist auch das Dreieck BCM gleichschenkelig mit $\angle MBC = \angle BMC$. Da $\angle BCM = \alpha$ ist, so ist $\angle BMC = \frac{180° - \alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Somit $\alpha AMB = 180° - (\frac{\alpha}{2} + 90° - \frac{\alpha}{2}) = 90°$.



Aufgabe 2.

$n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e \cdot 13^f \cdot \ldots$
Die Anzahl A der Teiler von n ist $A(n) = (a+1) \cdot (b+1) \cdot (c+1) \cdot (d+1) \cdot \ldots$
Es gilt:

$$A(n) = (a+1) \cdot (b+1) \cdot (c+1) \cdot (d+1) \cdot \ldots = 21 = 3^1 \cdot 7^1$$

Da $b \geq 1$ und $d \geq 1$ ist, muss (1.Fall) $b+1 = 3$ und $d+1 = 7$ sein oder umgekehrt (2.Fall) $b+1 = 7$ und $d+1 = 3$, alle anderen Primzahlexponenten von n sind 0. Das ergibt die beiden Lösungen ($b = 6$; $d = 2$); ($b = 2$; $d = 6$), was für n die Lösungsmenge $L = \{35721; 1058841\}$ ergibt.

Aufgabe 3.

Betrachte naheliegenderweise die Gleichung modulo 8. Die Quadrate liegen in $M = \{0; 1; 4\}$ und die aus drei Summanden bestehende Summe liegt in $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Die Restklasse 7 lässt sich nicht als Summe von drei Quadraten darstellen, die durch die rechte Seite der Gleichung dargestellt wird. Also gibt es keine Lösung.

t	$t^2 \pmod 8$
0	0
1	1
2	4
3	1
4	0
5	1
6	4
7	1

Aufgabe 4.

$n^4 – n^2 + n – 1 = n^2(n^2-1) + (n-1) = (n-1) \cdot (n^2(n+1)+1) = (n-1)(n^3+n^2+1)$.
Wenn $(n-1)^2$ A teilt, so muss $(n-1)$ die rechte Klammer (n^3+n^2+1) teilen.
also $n-1|n^3+n^2+1$ und $n-1|n^2(n-1)$ also gilt auch $n-1|n^3+n^2+1-(n^3-n^2)$ also $n-1|2n^2+1$
Weiters $n-1|2n(n-1)$ und folglich auch $n-1|2n^2+1-(2n^2-2n) \Rightarrow n-1|2n+1$ und $n-1|2n-2$
$\Rightarrow n-1|2n+1-(2n-2)$ und das ergibt 3.
$n-1$ liegt in $\{1; -1; 3; -3\}$ und so liegt n in $\{2; 0; 4; -2\}$.

Bemerkung: Da für $n = 2$ und auch für $n = 0$ der sich ergebende Teiler 1 ist, sind diese beiden Zahlen sicher in der gesuchten Menge (1 teilt jede Zahl).
Aus $t|a$ und $t|b$ folgt $t|a-b$

Aufgabe 5.

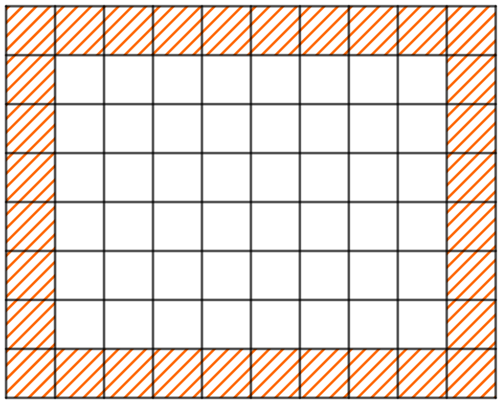
Für die Primzahl 7 gilt $x^7 \equiv x \pmod 7$. Multiplikation mit x ergibt $x \cdot x^7 \equiv x \cdot x \equiv x^2 \pmod 7$. Die Kongruenz vereinfacht sich zu $x^2 - 2 \equiv 0 \pmod 7$. Nur für $x \equiv 3$ und $x \equiv 4 \pmod 7$ ist die Gleichung erfüllt.
$L = \{x_1 = 7k+3; x_2 = 7k+4 \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z}_0^+\}$.
Zum Beispiel gilt für $k = 0$: ($x_1 = 3$; $y_1 = 937$) und ($x_2 = 4$; $y_2 = 9362$). Das sind die beiden kleinsten Lösungselemente.
Der Satz von Fermat für Primzahlen p :
Für beliebige ganze Zahlen a gilt $a^p \equiv a \pmod p$.

x	$x^2 \pmod 7$
0	0
1	1
2	4
3	2
4	2
5	4
6	1

Aufgabe 6.

Randquadrate: $2a + 2(b-2)$
Innenliegend: $(a-2) \cdot (b-2)$

$$\begin{aligned} 2a + 2b - 4 &= ab - 2a - 2b + 4 \\ ab - 4a - 4b + 8 &= 0 \\ (a-4) \cdot (b-4) - 8 &= 0 \\ (a-4) \cdot (b-4) &= 8 \end{aligned}$$



Folgende Zerlegungen sind möglich:

a) 1 8

b) 2 4

c) 4 2

d) 8 1

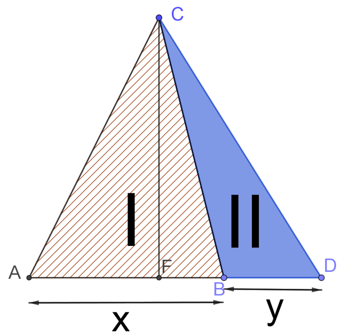
a) $a = 5$; $b = 12$

b) $a = 6$; $b = 8$

c) $a = 8$; $b = 6$

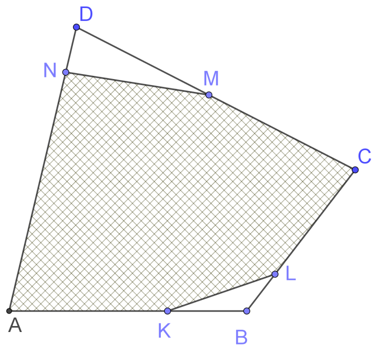
d) $a = 12$; $b = 5$

Aufgabe 7.



Für zwei Dreiecke ABC und BDC, die dieselbe Höhe $hc = FC$ haben gilt: Die Flächeninhalte verhalten sich wie die auf h normal stehenden Seiten.

$$A_{|} : A_{||} = x : y$$



Für die Dreiecke ABC und KBC gilt: $KBC = \frac{1}{3}ABC$
Für die Dreiecke KBL und KBC gilt: $KBL = \frac{1}{4}KBC = \frac{1}{12}ABC$ Für die Dreiecke MDA und CDA gilt: $MDA = \frac{1}{2}CDA$ Für die Dreiecke MDN und MDA gilt: $MDN = \frac{1}{6}MDA = \frac{1}{12}CDA$.

Also beträgt der Inhalt von $AKLCMN = \frac{11}{12}$

Aufgabe 8.

Die drei Dreiecke mit einem Eckpunkt P (siehe Zeichnung) sind zu ABC ähnlich.

$$a_1 : x = a : c \Rightarrow a1 : a = x : c$$
$$b_1 : y = b : c \Rightarrow b1 : b = y : c$$
$$\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c} = \frac{x + y + c_1}{c} = \frac{c}{c} = 1.$$

Aufgabe 9.

Für $x < 3$ keine Lösung, da Nenner der linken Seite der Gleichung eine Potenz von 2 wäre. Das kann die rechte Seite nicht darstellen.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$n := x - 3$ für $x = 3$ keine Lösung, da $3y > 0$.
$2n = 1 + 3y$. Für $y = 0$ erhalten wir $n = 1 \Rightarrow x = 4$
$(4|0)$ ist Lösung!

n	$2^n \pmod 3$
0	1
1	2
2	1
3	2
4	...

Sei $y > 0$. Wir betrachten die Gleichung mod 3.
$2^n \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow n$ gerade $\Rightarrow n = 2k$
$2^{2k}-1 = 3^y$

$$(2^k - 1) \cdot (2^k + 1) = 3^y$$

1. Fall: $1 \quad 3^y$
2. Fall: $3^a \quad 3^b$ mit $a + b = y$, $a < b$

– 1.Fall:

$$2^k - 1 = 1 (\Rightarrow k = 1 \Rightarrow n = 2 \Rightarrow x = 5) \quad \text{und} \quad 2^k + 1 = 3 = 3^y \Rightarrow y = 1$$

(5|1) ist Lösung!

– 2.Fall:
$2^k - 1 = 3a$ und $2^k + 1 = 3b$ also $b > a$
Wenn $2^k - 1$ eine Potenz von 3 ist, kann $2^k - 1 + 2$ keine Potenz von 3 sein. (Ausnahme: $2^k - 1 = 3^0 = 1$ und $2^k + 1 = 3$ liefert $k = 1$. Dieser Fall ist schon behandelt.) Also keine Lösung zusammen:
$L = \{(4|0); (5|1)\}$

Aufgabe 10.

$(x^2 + 5x) \cdot (x^2 + 5x + 4) = y^2$ Setze $x^2 + 5x = t$.
Das liefert $t \cdot (t + 4) = y^2$ $t^2 + 4t - y^2 = 0$.
Formel für die quadratische Gleichung anwenden liefert $t_{1,2} = -2 \pm 4 + y^2$
Damit sich eine ganze Zahl ergibt, muss $4 + y^2 = a^2$ sein $(a - y) \cdot (a + y) = 4$.
Alle möglichen Zerlegungen von 4 in den ganzen Zahlen ergeben die Fälle:

1	4
-1	-4
	usw.

Das ergibt die Lösungsmenge $L = \{(0|0); (-1|0); (-4|0); (-5|0)\}$

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

siehe [1, 2007], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 2.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 5.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 6.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 7.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 8.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 9.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 10.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Literatur

[1] Stefan Wagner. Skriptum Kombinatorik. `https://www.math.aau.at/OeMO/Downloads/datei/398`. (aufgerufen am 03.03.2021).