52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 26. Februar 2021

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Karl Czakler zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 23. Februar 2021 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Karl Czakler bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 26. Februar 2021 von 16:20-18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1. Aus den Ziffern 1 bis 9 werden drei dreistellige Zahlen gebildet, wobei jede Ziffer genau einmal verwendet wird. Man ermittle den kleinsten Wert, den das Produkt der drei Zahlen annehmen kann.

Aufgabe 2. Es seien ABC ein spitzwinkliges Dreieck, M der Mittelpunkt der Seite AC und F auf AB der Fußpunkt der Höhe durch den Eckpunkt C. Man beweise, dass $AM = AF$ genau dann gilt, wenn $\angle BAC = 60^0$.

Aufgabe 3. Bestimme die kleinste Zahl n, für die jede n - elementige Teilmenge von $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ zwei Zahlen enthält, deren Differenz 8 ist.

Aufgabe 4. Beweise, dass es keine ganzen Zahlen a, b, c gibt mit

$$a^2 + b^2 - 4c = 3.$$

Aufgabe 5. Es seien a und b reelle Zahlen mit $0 \leq a, b \leq 1$. Beweise:

$$\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} \leq 1.$$

Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 6. Gegeben sei ein Dreieck ABC. Es sei t die Tangente an den Umkreis im Punkt B. Die Fußpunkte der Höhen auf die Seiten BC bzw. AB seinen D und E. Beweise: Die Tangente t ist zur Verbindungsgeraden der Punkte D und E parallel.

Aufgabe 7. Die Punkte A und B liegen auf dem Kreis k, AB ist kein Durchmesser. C ist der Schnittpunkt der Tangenten in A bzw. B. Zeige, dass der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC auf k liegt.

Aufgabe 8. Beweise, dass es in jeder Menge M von fünf positiven ganzen Zahlen mindestens zwei Zahlen gibt, deren Summe oder deren Differenz durch 7 teilbar ist.

Aufgabe 9. Ermittle alle positiven ganzen Zahlen n für die gilt:

- n lässt bei der Division durch 3 den Rest 1.
- n^2 lässt bei der Division durch 11 den Rest 1.
- $100 < n < 200$

Aufgabe 10. Man zeige für alle positiven x und y:

$$\frac{(x+y)^2}{16} + 1 \geq \sqrt{xy}.$$

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Die Ziffer mit dem höchsten Stellenwert muss am kleinsten sein.

Aufgabe 2: Satz von Thales!

Aufgabe 3: Versuche eine möglichst große Teilmenge zu bilden, die keine zwei Zahlen enthält, deren Differnez 8 ist.

Aufgabe 4: Quadratische Reste mod 4

Aufgabe 5: Verwende: $(1-a)(1-b) \geq 0$

Aufgabe 6: Peripheriewinkelsatz!

Aufgabe 7: Peripheriewinkelsatz!

Aufgabe 8: Betrachte die Reste bei der Division durch 7.

Aufgabe 9: Untersuche die quadratischen Reste modulo 11

Aufgabe 10: Verwende $x + y \geq 2\sqrt{xy}$.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

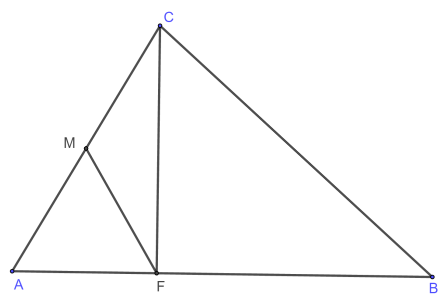
Seien $a, b, c, \ldots i$ die neun verschiedenen Ziffern und $z_1 = 100a + 10b + c, z_2 = 100d + 10e + f$ und $z_3 = 100g + 10h + i$ die drei dreistelligen Zahlen. Das Produkt $z_1 z_2 z_3$ ist am kleinsten, wenn $10^6 adg$ möglichst klein ist, also ist oBdA $a = 1, d = 2$ und $g = 3$. Der Wert von $10^5(adh + aeg + bdg) = 10^5(2h + 3e + 6b)$ muss ebenfalls möglichst klein sein. Also muss $2h + 3e + 6b$ möglichst klein sein. Da alle Ziffern genau einmal vorkommen folgt $h = 6, e = 5$ und $b = 4$, also $2h + 3e + 6b = 51$. Für die restlichen Ziffern c, f und i stehen noch die Ziffern $7, 8$ und 9 zur Verfügung. Die sechs möglichen Fälle rechnet man nun enfach durch und erhält als Minimum $13994694 = 147 \cdot 258 \cdot 369$.

Aufgabe 2.

Wir haben den Beweis in zwei Richtungen zu führen.

- Es sei $AM = AF$.

  Da das Dreieck ACF rechtwinkelig ist, gilt nach dem Satz von Thales $AM = AF$. Daher ist das Dreieck AMF gleichseitig und somit $\angle BAC = 60^0$.



- Es sei $\angle BAC = 60^0$.

  Da das Dreieck ACF rechtwinkelig ist, gilt wie oben $AM = AF$. Daher ist das Dreieck AMF gleichschenkelig und die Baiswinkel $60^0 = \angle BAC = \angle FAM$ sind gleich groß. Daher ist auch der dritte Winkel im Dreieck AMF gleich 60^0 und somit das Dreieck AMF gleichseitig. Also gilt $AM = AF$.

folgt

Aufgabe 3.

Die größte Teilmenge die keine zwei Zahlen enthält, deren Differenz 8 ist, ist offensichtlich die Menge $T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 17, 18, 19, 20\}$, hat also 12 Elemente. Daher ist die kleinste Zahl n gleich 13.

Aufgabe 4.

Eine Quadratzahl lässt bei der Division durch 4 die Reste 0 oder 1. Daher gilt

$a^2 + b^2 - 4c \equiv 0 \mod (4)$ oder $a^2 + b^2 - 4c \equiv 1 \mod (4)$ oder $a^2 + b^2 - 4c \equiv 2 \mod (4)$.

Da die rechte Seite der Gleichung 3 ist, kann es keine ganzzahligen Lösungen geben.

Aufgabe 5.

Wir können die Ungleichung mit dem gemeinsamen Nenner $(a+1)(b+1) > 0$ multiplizieren. Wir erhalten die äquivalente Ungleichung

$$a^2 + b^2 \leq ab + 1.$$

Da für jede reelle Zahl t mit $0 \leq t \leq 1$ die Ungleichung $t^2 \leq t$ gilt, genügt es

$$a + b \leq ab + 1$$

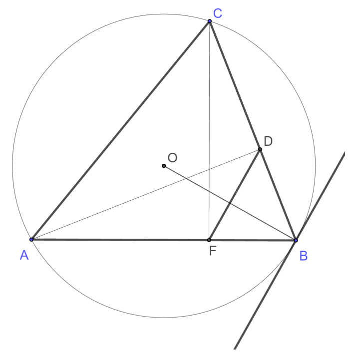
zu zeigen. Das ist aber zu

$$0 \leq (1-a)(1-b)$$

äquivalent und wegen $0 \leq a, b \leq 1$ richtig. Gleichheit gilt für die Zahlenpaare $(1,1), (1,0)$ und $(0,1)$.

Aufgabe 6.

Der Winkel von t zur Seite AB ist $\gamma = \angle ACB$ (Peripheriewinkelsatz: Der Sehnen Tangentenwinkel ist gleich dem Peripheriewinkel).
Es sei H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC. Das Viereck $EBDH$ ist ein Sehnenviereck.



Daher gilt

$$\angle BED = \angle BHD = \gamma.$$

Damit schließen aber DE und t denselben Winkel mit der Seite AB ein, d.h. sie sind parallel.

Aufgabe 7.

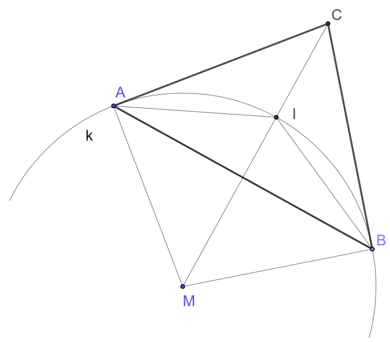
Sei M der Mittelpunkt des Kreises k. Der Schnittpunkt von CM mit k sei I. Da das Dreieck ACB ist gleichschenkelig ist, genügt es zu zeigen, dass AI den Winkel $\angle BAC$ halbiert. Mit dem Peripheriewinkelsatz gilt

$$\angle CAI = \angle ABI$$

und aus Symmetiegründen gilt

$$\angle ABI = \angle IAB.$$

Daher halbiert AI den Winkel $\angle BAC$.



Aufgabe 8.

Falls M zwei Zahlen enthält, die bei der Division durch 7 denselben Rest lassen, so ist die Differenz beider Zahlen durch 7 teilbar. Lässt nun jede Zahl aus M einen anderen Rest bei der Division durch 7, dann ist die Menge R der auftretenden Reste eine fünfelementige Teilmenge der Menge $0, 1, 2, \ldots, 6$. Wir betrachten die Restpaare $(1, 6)$, $(2, 5)$ und $(3, 4)$. Von diesen drei Paaren können höchstens zwei einen nicht in R befindlichen Rest enthalten, d.h. R enthält mindestens ein Paar, dessen beide Reste in R liegen. Damit ist aber gezeigt, dass es in M zwei Zahlen gibt, deren Summe durch 7 teilbar ist.

Aufgabe 9.

Aus $n^2 \equiv 1 \pmod{11}$ folgt $n \equiv 1 \pmod{11}$ oder $n \equiv -1 \pmod{11}$, also $n = 11k + 1$ oder $n = 11k + 10$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Also gilt $n \equiv 2k + 1 \pmod 3$. Damit $n \equiv 1 \pmod 3$ gilt, muss $k = 3r$ mit $r \in \mathbb{Z}$ gelten. Also haben wir $n = 33r + 1$ oder $n = 33r + 10$.
Aus $100 < 33r + 1 < 200$ folgt $r = 4, 5$ und $r = 6$ und man erhält die Lösungen $133, 166$ und 199.
Aus $100 < 33r + 10 < 200$ folgt $r = 3, 4$ und $r = 5$ und man erhält die Lösungen $109, 142$ und 175.

Aufgabe 10.

Wir verwenden die arithmetisch- geometrische Ungleichung $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ und verschärfe die Ungleichung indem wir $2\sqrt{xy}$ einsetzen.

$$\frac{(2\sqrt{xy})^2}{16} + 1 \geq \sqrt{xy}.$$

Das ist äquivalent zu

$$xy - 4\sqrt{xy} + 4 \geq 0$$

also zu

$$(\sqrt{xy} - 2)^2 \geq 0.$$

Gleichheit gilt für $x = y = 2$.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

siehe [1], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 2.

siehe [2, 2018], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 3.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 5.

siehe [2, 2013], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 6.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 7.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 8.

siehe [1], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 9.

siehe [1], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 10.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Literatur

[1] Archivierte Aufgaben der Deutschen Mathematik-Olympiade. https://www.mathematik-olympiaden.de/moev/index.php/aufgaben/aufgabenarchiv. (aufgerufen am 08.03.2021).

[2] Gerhard Kirchner. Leitfaden für den JRW (Junior-Regionalwettbewerb). https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/90. (aufgerufen am 08.03.2021).