52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen Kurs „Mathematik macht Freu(n)de" – Aufgabenblatt für den 19. März 2021

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Josef Pech zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 16. März 2021 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Josef Pech bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 19. März 2021 von 16:20-18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1. Ermittle a, b, c so, dass die Gleichung

$$\frac{x+5}{(x-1)\,(x-2)\,(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$$

für alle zulässigen Werte von x gilt.

Aufgabe 2. Löse in den reellen Zahlen $z^8 + 4z^6 - 10z^4 + 4z^2 + 1 = 0$

Aufgabe 3.

a) Zeige, dass

$$A(m) = \sum_{k=1}^{m} \frac{k(k-3)}{2} = \frac{m}{6}(m^2 - 3m - 4)$$

b) Für welche Wahl von m ist A durch 7 teilbar?

Aufgabe 4. Löse in den positiven reellen Zahlen

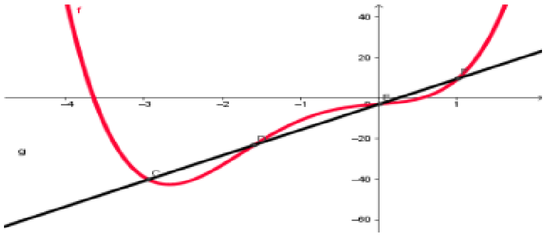
$$\lfloor x^2 \rfloor + \lfloor 2x \rfloor = x + \frac{1}{4}$$

Aufgabe 5. Für welche natürlichen Zahlen n ist $3^n - n^2$ eine Primzahl?

Aufgabe 6. Löse in den ganzen Zahlen

$$\frac{x^2 + 3x}{2x - 1} = y$$

Aufgabe 7.



Eine Gerade $g : y = kx + d$ schneidet den Graphen der Funktion

$$f(x) = 2x^4 + 7x^3 + 3x - 3$$

in vier voneinander verschiedenen Punkten $A_1(x_1 \mid y_1)$, $A_2(x_2 \mid y_2)$, $A_3(x_3 \mid y_3)$, $A_4(x_4 \mid y_4)$.

Bestimme

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$$

Aufgabe 8.
Sei ABC ein rechtwinkeliges Dreieck mit $\gamma = \angle ACB = 90\circ$. Spiegelt man den Inkreismittelpunkt I an den Seiten a, b, c (in dieser Reihenfolge), so erhält man die Punkte P, Q, R.
Zeige:

a) C liegt auf PQ.

b) Der Winkel $\angle PRQ$ beträgt 45°

c) Bestimme den Umkreisradius des Dreiecks PQR in Abhängigkeit der Seitenlängen des Dreiecks ABC.

Aufgabe 9.

$$3 \cdot 4 = 12$$
$$33 \cdot 34 = 1122$$
$$333 \cdot 334 = 111222$$

Stelle eine Vermutung auf und beweise diese.

Aufgabe 10. In einem konvexen n-Eck sind alle Diagonalen eingezeichnet. Man beweise: Jede Seite und jede Diagonale können so mit einem Pfeil versehen werden, dass in Pfeilrichtung kein geschlossener Weg aus Seiten und Diagonalen möglich ist.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Auf gleichen Nenner bringen; Koeffizientenvergleich

Aufgabe 2. $z^2 = x$

Aufgabe 3.

a) Vollständige Induktion

b) Zähler $\equiv 0 \pmod 7$

Aufgabe 4. Die rechte Seite muss eine ganze Zahl sein.

Aufgabe 5. 2 Fälle:

a) n gerade

b) n ungerade

Aufgabe 6. Ein Bruch $\frac{a}{b}$ mit ganzen Zahlen a, b $(\neq 0)$ ist eine ganze Zahl, wenn ...

Aufgabe 7. Stichwort: elementarsymmetrische Funktionen

Aufgabe 8. Beachte auftretende Winkel beim Eckpunkt C.

Aufgabe 9. Wie stellt man die Zahl $a = 333\ldots3333333$ als Term dar? (dabei soll die Ziffer 3 genau n-mal vorkommen.

Aufgabe 10. Probiere zu Beginn mit dem Dreieck, Viereck ev. auch noch 5-Eck.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

$\frac{a(x^2-5x+6)}{(x-1)} + \frac{b(x^2-4x+3)}{x-2} + \frac{c(x^2-3x+2)}{(x-3)} = \frac{x^2(a+b+c)+x(-5a-4b-3c)+(6a+3b+2c)}{((x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{(x+5)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$
für alle x. Also (Koeffizientenvergleich)

$$\begin{aligned} a+b+c &= 0 \\ -5a-4b-3c &= 1 \\ 6a+3b+2c &= 5 \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Systems ist $a = 3$; $b = -7$; $c = 4$

Aufgabe 2.

$z^2 = x \quad x4 + 4x3 - 10x2 + 4x + 1 = 0$
Diese Gleichung ist symmetrisch gebaut. Division durch x^2 ($x \neq 0$, da 0 keine Lösung ist) ergibt
$x^2 + 4x - 10 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$
Mit $x + \frac{1}{x^2} = t$ erhalten wir $(x + \frac{1}{x^2})^2 = t^2$ bzw. $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = t^2$ liefert
$t^2 - 2 + 4t–10 = 0$
$t^2 + 4t–12 = 0$
$(t-2) \cdot (t+6) = 0$ ergibt die Lösungen $t_1 = 2$; $t_2 = -6$
$\mathbf{t_1 = 2}$
$x + \frac{1}{x} = 2$ ergibt die Lösung $x_1 = 1 = z^2$ und wir erhalten $z = \pm 1$
$\mathbf{t_2 = -6}$
$x + \frac{1}{x} = -6 \Rightarrow x^2 + 1 = -6x \Rightarrow x^2 + 6x + 1 = 0$
$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-1} = -3 \pm 2 \cdot \sqrt{2}$. Da beide Lösungen negativ sind, erhalten wir keine weitere reelle Lösung für z. $L = \{1; -1\}$

Aufgabe 3.

a) Der Beweis wird mit vollständiger Induktion geführt:
Für $m = 1$ gilt: $\frac{1(1-3)}{2} = \frac{1}{6} \cdot (1^2 - 3.1 - 4)$. richtig!
Vor.: Die Formel stimmt für m.
Beh.: Formel ist auch für $m + 1$ gültig.
Bew.: $\sum_{k=1}^{m+1} = \sum_{k=1}^{m} \frac{k(k-3)}{2} + \frac{(m+1)\cdot(m+1-3)}{2} = \ldots = \frac{m+1}{6}(m+2)(m-3)$ und das stimmt mit $A(m+1)$ überein.

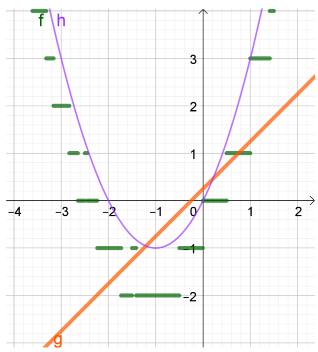
b) Wir betrachten den Zähler von A (mod 7)

Also nur für $m = 7t$; $m = 7t + 4$; $m = 7t + 6$ ist A durch 7 teilbar.

m	$m+1$	$m-4$	Produkt (mod7)
0	1	3	$\equiv 0$
1	2	4	$\equiv 1$
2	3	5	$\equiv 2$
3	4	6	$\equiv 2$
4	5	0	$\equiv 0$
5	6	1	$\equiv 2$
6	0	2	$\equiv 0$

Aufgabe 4.

Graphische Lösung:



Da die linke Seite eine ganze Zahl ist, gilt:
$x+\frac{1}{4} = n \in Z_0^+$ mit $x = n-\frac{1}{4}$ erhalten wir $2x = 2n-\frac{1}{2} \Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = 2n-1$
$\lfloor x^2 \rfloor + 2n - 1 = n$ und somit $\lfloor x^2 \rfloor = 1-n$. Da $\lfloor x^2 \rfloor \geq 0$, $1 - n \geq 0$, $0 \leq n \leq 1$. Also kommt für n nur 0 oder 1 in Frage!
Fall $n = 0$
$x = -\frac{1}{4}$ liegt nicht im zulässigen Bereich.
Fall $n = 1$
$x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Durch Einsetzen erkennen wir, dass $\frac{3}{4}$ Lösung ist.
$L = \{\frac{3}{4}\}$

Aufgabe 5.

1.Fall:
n ungerade $\Rightarrow p = 2$ Die Gleichung lautet $3^n - n^2 = 2$
Die linke Seite wächst stark mit wachsendem n.
Beh.: $3^n - n^2 > 2$ für $n \geq 2$ oder $3^n > n^2 + 2$;
Bew.: Vollst. Induktion
START: Für $n = 2$ gilt $3^2 - 2^2 = 5 > 2$
Vor.: $3^n - n^2 > 2$; Beh.: $3^{n+1} - (n + 1)^2 > 2$; oder $3n + 1 > (n + 1)^2 + 2$
Nach Vor. gilt $3^n > n^2 + 2 \quad | \cdot 3$

$$3 \cdot 3^n > 3n^2 + 6 > (n + 1)^2 + 2 \text{ (rechte Ungl. ist Behauptung)}$$
$$2n^2 - 2n + 3 > 0$$
$$2n(n + 1) + 3 > 0 \text{ ist für } n \geq 2 \text{ wahr}$$

Damit ist auch die ursprüngliche Ungleichung gezeigt.
Wir müssen nur noch $n = 1$ überprüfen: $3^1 - 1^2 = 2 \ldots$ prim. $n = 1$ ist Lösung.
2.Fall: n gerade $n = 2k$

$$3^{2k} - (2k)^2 = p$$
$$(3^k - 2k) \cdot (3^k + 2k) = p = 1 \cdot p \text{ Also muss}$$
$$(3^k - 2k) = 1 \text{ und}$$
$$(3^k + 2k) = p$$
$$3^k - 2k = 1$$
$$3^k + 2k = p$$

Auch hier wenden wir den Gedanken von vorhin an: 3^k wächst viel schneller als $2k$. Aus der rechtsstehenden Tabelle entnehmen wir, dass nur für $k = 0$ und für $k = 1$ die erste Gleichung gültig ist. (allg: V.I.)
$k = 0 \Rightarrow n = 0$ Gleichung $3^0 - 0^2 = 1–0 = 1$ ... nicht prim
$k = 1 \Rightarrow n = 2$ Gleichung $3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$ ... prim (Lösung)

k	$2k$	3^k	$3^k - 2k$
0	0	1	1
1	2	3	1
2	4	9	5
3	6	27	21

Somit gilt $L = \{1; 2\}$

Aufgabe 6.

Die linke Seite der Gleichung ist eine ganze Zahl ($= y$), wenn der Nenner Teiler des Zählers ist.

$$2x - 1 | (x^2 + 3x) \cdot 2$$
$$2x - 1 | (2x - 1) \cdot x$$

Subtraktion ergibt:

$$2x - 1 | 7x \cdot 2$$
$$2x - 1 | (2x - 1) \cdot 7$$

Subtraktion ergibt:

$$2x - 1 | 7$$

also liegt $2x - 1$ in $T(7) = 1; 7; -1; -7$
und folglich liegt x in $\{1; 4; 0; -3\}$ und y in $\{4; 4; 0; 0\}$
$L = \{(1; 4); (4; 4); (0; 0); (-3; 0)\}$

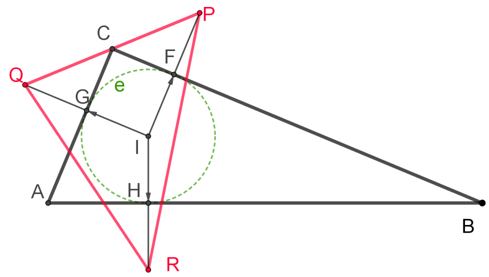
Aufgabe 7.

In den Schnittpunkten gilt: $f(x) = kx + d$
$2x^4 + 7x^3 + 3x - 3–kx–d = 0.$
Da die Lösungen wie oben beschrieben vorliegen, gilt
$(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4) = 0$
Ausmultipliziert ergibt das $x^4 + x^3 \cdot (-x_1 - x_2 - x_3 - x_4) + \ldots = 0$
Vergleicht man die beiden Gleichungen (erste Gleichung wird durch 2 dividiert; Koeffizientenvergleich), so erhält man für den Koeffizienten von $x^3 : \frac{7}{2} = -x_1 - x_2 - x_3 - x_4$
Also gilt: $\frac{(x_1+x_2+x_3+x_4)}{4} = -\frac{7}{8}$

Aufgabe 8.

Die kongruenten Dreiecke CGQ und CFP sind gleichschenkelig und rechtwinkelig. Deshalb gilt: $\angle PCQ = 45° + 90° + 45° = 180°$. Also liegt C auf PQ. Der Inkreismittelpunkt I des Dreiecks ABC ist I auch der Umkreismittelpunkt des Dreiecks PQR.

$$IP = IQ = IR = 2\rho.$$



Da $FCGI$ ein Quadrat ist, gilt $\angle QRP = \frac{1}{2} \cdot \angle QIP = \frac{1}{2} \cdot 90° = 45°$.
Der Inhalt des Dreiecks ABC ist $A = \frac{\rho}{2} \cdot (a + b + c) = \frac{a \cdot b}{2}$
$\Rightarrow$ Für den Umkreisradius r von PQR gilt:

$$r = 2\rho = \frac{2ab}{a + b + c}$$

Aufgabe 9.

– Symbolisch:

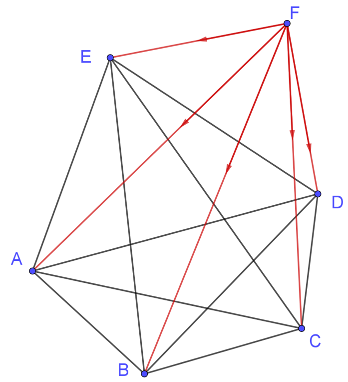
$$[\underbrace{333\ldots333}_{n}] \cdot [\underbrace{333\ldots333}_{n} + 1] = [\underbrace{1111\ldots1}_{n}\underbrace{2222\ldots2}_{n}]$$

$$a = 3 \cdot (1 + 10 + \ldots + 10^{n-1}) = 3 \cdot \frac{10^n - 1}{10 - 1} = \frac{10^n - 1}{3}$$
$$a + 1 = \frac{10^n - 1}{3} + 1 = \frac{10^n + 2}{3}$$
$$a \cdot (a + 1) = \frac{10^n - 1}{3} \cdot \frac{10^n + 2}{3} = \frac{10^{2n} + 10^n - 2}{9}$$

–

$$\begin{aligned} B &= 10^n \cdot (1 + 10 + \ldots + 10^{n-1}) + 2 \cdot (1 + 10 + \ldots + 10^{n-1}) \\ &= (10^{n+2}) \cdot \frac{10^n - 1}{10 - 1} = (10^n + 2) \cdot \frac{10^n - 1}{9} \\ &= \frac{(10^n - 1) \cdot (10^n + 2)}{9} \\ &= \frac{10^{2n} + 10^n - 2}{9} \end{aligned}$$

Aufgabe 10.



1. Beweis (mit vollständiger Induktion)
Für $n = 3$ ist eine solche „Einbahnregelung“ möglich.
Ind.-Vor.: Für n ist eine solche vollständige Einbahnregelung möglich.
Beh. Für $n+1$ Punkte ist eine „Einbahnregelung auch möglich.
Bew.: Alle Linien $P_k\,P_{n+1}$ werden so orientiert, dass der Pfeil vom Punkt P_{n+1} weg zeigt. Dadurch ist ein geschlossener Weg über P_{n+1} nicht möglich. Alle anderen geschlossenen Wege sind laut Induktionsvoraussetzung nicht möglich. Also gibt es auch für $n+1$ Punkte eine Orientierung aller auftretenden Verbindungslinien, die keinen geschlossenen Weg ermöglichen.
2. Beweis:
Alle n Punkte werden von 1 bis n durchnummeriert.
Anschließend werden alle Verbindungslinien folgendermaßen orientiert: für $k < l$ erfolgt die Pfeilrichtung von k nach l. Dadurch kann kein geschlossener Weg auftreten, da ja Endpunkt und Anfangspunkt (geschlossener Weg) übereinstimmen müssen.

Bemerkung:
Ein möglicher geschlossener Weg könnte 2-5-7-9-2 sein. Er besteht aus $\{25; 57; 79; 29\}$ (in richtiger Orientierung angeschrieben. Dieser Weg ist nicht zulässig, da die Linie 92 von 2 nach 9 orientiert ist.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

siehe [2], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 2.

siehe [2], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 3.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 5.

siehe [3, 1997], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 6.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 7.

siehe [3, 1996], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 8.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 9.

siehe [3, 1996], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 10.

siehe [1, 1973/74], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Literatur

[1] Archivierte Aufgaben der Deutschen Mathematik-Olympiade. `https://www.mathematik-olympiaden.de/moev/index.php/aufgaben/aufgabenarchiv`. (aufgerufen am 22.03.2021).

[2] Arthur Engel. *Problem-solving strategies (Problem Books in Mathematics)*. Springer, 1998.

[3] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 1990–1999: Aufgaben und Lösungen*. öbv, 1999.