52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 26. März 2021

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Karl Czakler zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 23. März 2021 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Karl Czakler bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 26. März 2021 von 16:20-18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

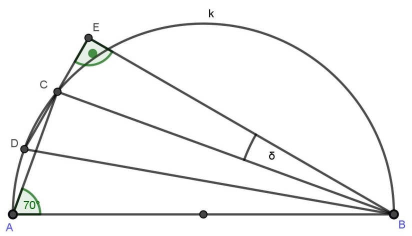
Aufgabe 1.

Wir betrachten alle natürlichen Zahlen n, für die gilt, dass jede dieser Zahlen im Dezimalsystem mit 150 Ziffern 4 und beliebig vielen Ziffern 0 und sonst keinen anderen Ziffern geschrieben wird. Kann eine dieser Zahlen n eine Quadratzahl sein?

Aufgabe 2. Man bestimme alle positiven ganzzahligen Lösungen der Gleichung
$18x^2 + 2y^2 = 2018$.
Man beweise, dass die Gleichung $9x^2 + y^2 = 2018$ keine ganzzahligen Lösungen hat.

Aufgabe 3. Über der Strecke AB ist ein Halbkreis k errichtet.

Der Punkt C liegt auf k und es gilt $\angle CAB = 70°$. Die Winkelsymmetrale des Winkels $\angle ABC$ schneidet den Kreis k in D. Der Lotfußpunkt von B auf die Gerade DC sei E. (vgl. nachstehende Figur) Bestimme den Winkel $\delta = \angle CBE$.



Aufgabe 4. Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$. Es sei E ein Punkt auf AD und F ein Punkt auf BC mit $BE = EF = DF = 30$.
Berechne den Flächeninhalt des Quadrats.

Aufgabe 5. Der Mittelpunkt M des Quadrates $ABCD$ wird an C gespiegelt. Dadurch erhält man den Punkt E. Der Schnittpunkt des Umkreises des Dreiecks BDE mit der Strecke AM wird mit S bezeichnet. Man zeige, dass S die Strecke AM halbiert.

Aufgabe 6. Bestimme alle positive ganzen Zahlen für die gilt:

$$\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} = \sqrt{ab-1}$$

Aufgabe 7. Die Punkte A und B liegen auf dem Kreis k, AB ist kein Durchmesser. C ist der Schnittpunkt der Tangenten in A bzw. B. Zeige, dass der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC auf k liegt.

Aufgabe 8. Es seien a und b reelle Zahlen mit $ab = 1$. Man bestimme die größte Zahl C, sodass

$$(a-2)^2 + (b-2)^2 \geq C$$

unabhängig von a und b erfüllt ist.

Aufgabe 9. Ermittle alle positiven ganzen Zahlen n für die gilt:

- n lässt bei der Division durch 3 den Rest 1.
- n^2 lässt bei der Division durch 11 den Rest 1.
- $100 < n < 200$

Aufgabe 10. Man zeige für alle positiven x und y:

$$\frac{(x+y)^2}{16} + 1 \geq \sqrt{xy}.$$

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Was kann man mit Hilfe der Ziffernsumme einer Zahl feststellen?

Aufgabe 2: Wie groß kann x bei der ersten Gleichung maximal sein?

Aufgabe 3: Winkeljagd

Aufgabe 4: In welche Teile zerlegen die Strecken BE, EF und FD das Quadrat?

Aufgabe 5: Einfach nachrechnen, Kathetensatz!

Aufgabe 6: Quadrieren, Rechteckszerlegung!

Aufgabe 7: Peripheriewinkelsatz!

Aufgabe 8: Wähle zunächst geeignete Wertd für a und b um C festzulegen. Beweise dann deine Vermutung!

Aufgabe 9: Untersuche die quadratischen Reste modulo 11

Aufgabe 10: Verwende $x + y \geq 2\sqrt{xy}$.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Wir führen einen indirekten Beweis. Sei n eine Zahl dieser Bauart und Quadratzahl.Die Ziffernsumme von n ist 600. Die Zahl n ist daher durch 3 teilbar. Da n eine Quadratzahl ist, muss sie auch durch 9 teilbar sein. Nach der Teilbarkeitsregel für 9 muss die Ziffernsumme von n auch durch 9 teilbar sein. Widerspruch! (9 teilt nicht 600.)

Aufgabe 2.

Die erste Gleichung gekürzt lautet

$$9x^2 + y^2 = 1009.$$

Daher gilt

$$9x^2 < 1009 \Longrightarrow x^2 < 113 \Longrightarrow x \leq 10.$$

Die zehn möglichen Werte für x iefern nur ein ganzzahliges Lösungspaar: $(5, 28)$
Die linke Seite der zweiten Gleichung ist kongruent 0 oder 1 modulo 3. Die rechte Seite ist kongruent 2 modulo 3. Daher kann es keine Lösungen geben.

Aufgabe 3.

Mit dem Peripheriewinkelsatz gilt

$$\angle CAB = \angle CDB = 70°.$$

Das Dreieck ABC ist rechtwinkelig, mit dem rechten Winkel in C. Daher gilt

$$\angle ABC = 90° - 70° = 20°.$$

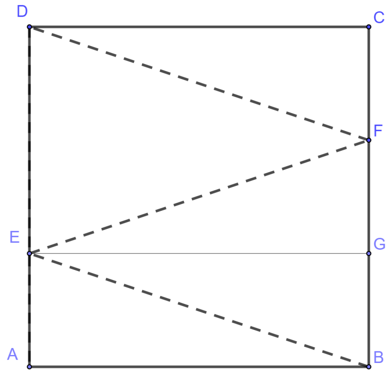
Da AD die Winkelsymmetrale des Winkels $\angle ABC$ ist, folgt $\angle DBC = 10 \circ$. Da das Dreieck BDC ebenfalls rechtwinkelig ist, können wir δ wie folgt berechnen:

$$\delta + 10° + 70° = 90° \Longrightarrow \delta = 10°.$$

folgt

Aufgabe 4.

Sei a die Seitenlänge des Quadrats.



Die Dreiecke ABE und CDF sind kongruent. Daher gilt $AE = CF$. Das Dreick BEF ist gleichschenkelig, Der Fußpunkt G der Höhe durch E halbiert daher die Strecke BF.

Es gilt daher

$$AE = BG = GF = CF,$$

also $AE = \frac{a}{3}$. Mit Pythagoras folgt dann

$$a^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2 = 30^2 \Longrightarrow a^2 = 810.$$

Aufgabe 5.

Das Dreieck SBE ist rechtwinkelig mit dem rechten Winkel im Eckpunk B. Die Strecke MB ist die Höhe auf die Hypothenuse SE dieses Dreiecks. Daher gilt mit dem Höhensatz

$$SM \cdot ME = MB^2$$

und mit $ME = 2 \cdot MB$ folgt $SM = \frac{MB}{2} = \frac{AM}{2}$.

Aufgabe 6.

Es gilt $a > 1$ und $b > 1$. Wir quadrieren die Gleichung und erhalten

$$a - 1 + 2\sqrt{a-1}\sqrt{b-1} + b - 1 = ab - 1$$

also

$$2\sqrt{a-1}\sqrt{b-1} = ab - a - b + 1.$$

Den Term $ab - a - b + 1$ kann man als Produkt $(a-1)(b-1)$ anschreiben (Rechteckszerlegung). Damit ist die obige Gleichung zu

$$4(a-1)(b-1) = (a-1)^2(b-1)^2$$

äquivalent. Für $a = 1$ oder $b = 1$ erhalten wir die Lösungspaare $(1, k)$ und $(k, 1)$ mit k ganzzahlig und $k \geq 1$. Für $a \neq 1$ und $b \neq 1$ können wir durch $(a-1)(b-1)$ kürzen und es ergibt sich

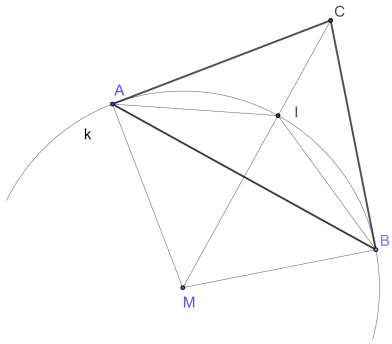
$$4 = (a-1)(b-1).$$

Die Zahl 4 lässt sich als Produkt von zwei positiven ganzen Zahlen nur in der Form $4 = 1 \cdot 4$ und $4 = 2 \cdot 2$ darstellen. Damit ergeben sich folgende weitere positiven ganzzahligen Lösungspaare $(2, 5), (5, 2)$ und $(3, 3)$.

Aufgabe 7.

Sei M der Mittelpunkt des Kreises k.

Der Schnittpunkt von CM mit k sei I. Da das Dreieck ACB ist gleichschenkelig ist, genügt es zu zeigen, dass AI den Winkel $\angle BAC$ halbiert.



Mit dem Peripheriewinkelsatz gilt

$$\angle CAI = \angle ABI$$

und aus Symmetiegründen gilt

$$\angle ABI = \angle IAB.$$

Daher halbiert AI den Winkel $\angle BAC$.

Aufgabe 8.

Setzt man $a = 1$ und $b = 1$ so erhält man $C \leq 2$. Wir vermuten, dass

$$(a-2)^2 + (b-2)^2 \geq 2$$

für alle reellen Zahlen a und b mit $ab = 1$ gilt. Diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} a^2 - 4a + 4 + b^2 - 4b + 4 &\geq 2 \\ a^2 + b^2 + 6 - 4(a+b) &\geq 0 \\ (a+b)^2 - 2ab + 6 - 4(a+b) &\geq 0 \\ (a+b)^2 - 4(a+b) + 4 &\geq 0 \\ (a+b-2)^2 &\geq 0, \end{aligned}$$

und damit ist alles gezeigt.

Aufgabe 9.

Aus $n^2 \equiv 1 \pmod{11}$ folgt $n \equiv 1 \pmod{11}$ oder $n \equiv -1 \pmod{11}$, also $n = 11k+1$ oder $n = 11k+10$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Also gilt $n \equiv 2k+1 \pmod 3$. Damit $n \equiv 1 \pmod 3$ gilt, muss $k = 3r$ mit $r \in \mathbb{Z}$ gelten. Also haben wir $n = 33r + 1$ oder $n = 33r + 10$.
Aus $100 < 33r + 1 < 200$ folgt $r = 4, 5$ und $r = 6$ und man erhält die Lösungen $133, 166$ und 199.
Aus $100 < 33r + 10 < 200$ folgt $r = 3, 4$ und $r = 5$ und man erhält die Lösungen $109, 142$ und 175.

Aufgabe 10.

Wir verwenden die arithmetisch- geometrische Ungleichung $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ und verschärfe die Ungleichung indem wir $2\sqrt{xy}$ einsetzen.

$$\frac{(2\sqrt{xy})^2}{16} + 1 \geq \sqrt{xy}.$$

Das ist äquivalent zu

$$xy - 4\sqrt{xy} + 4 \geq 0$$

also zu

$$(\sqrt{xy} - 2)^2 \geq 0.$$

Gleichheit gilt für $x = y = 2$.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

siehe [1], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 2.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 5.

siehe [2, 2009], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 6.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 7.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 8.

Unbekannte Aufgabe, bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 9.

siehe [1], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 10.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Literatur

[1] Archivierte Aufgaben der Deutschen Mathematik-Olympiade. https://www.mathematik-olympiaden.de/moev/index.php/aufgaben/aufgabenarchiv. (aufgerufen am 06.04.2021).

[2] Gerhard Kirchner. Leitfaden für den JRW (Junior-Regionalwettbewerb). https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/90. (aufgerufen am 06.04.2021).