52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 09. April 2021

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Josef Pech zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 06. April 2021 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Josef Pech bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 09. April 2021 von 16:20-18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1. Für welche ganzen Zahlen x ist $|x^3 - 8|$ eine Primzahl?

Aufgabe 2. Wie viele Lösungen in den ganzen Zahlen hat die Gleichung $(|x|-2)^2 + (|y|-2)^2 < 5$?

Aufgabe 3. Zeige, dass die Gleichung $x^2 + y^2 = 3 \cdot (z^2 + u^2)$ in den ganzen Zahlen nur die triviale Lösung $(0 \mid 0 \mid 0 \mid 0)$ hat.

Aufgabe 4. Für welche ganzen Zahlen x ist $|x^4 + 4|$ eine Primzahl?

Aufgabe 5. Löse in den ganzen Zahlen $1 + x + x^2 + x^3 = 2^y$.

Aufgabe 6. Wie viele Lösungen in den ganzen Zahlen hat die Gleichung $x^2 - 11y - 4 = 0$, wenn $1021 \leq x \leq 2021$ gilt?

Aufgabe 7. Zeige: Es gibt kein Polynom $p(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_2x^2 + A_1x + A_0$ (wobei alle Koeffizienten A_i ganzzahlig sind) mit $p(5) = 0$ und $p(8) = 2$.
n ... Grad des Polynoms;

Aufgabe 8.
AB ist Sehne im Kreis k. Die Tangente an k in A sei t. Die Gerade durch B und M (Mittelpunkt) sei s. Der Schnittpunkt von t und s sei P. Der spitze Winkel zwischen Sehne und Tangente ist fünfmal so groß wie der Winkel α zwischen s und t. Berechne diesen Winkel α.

Aufgabe 9. P ist der Halbierungspunkt der Sehne AB eines Kreises k.
Zeige: Für jede weitere Sehne CD durch P gilt: $CD > AB$.

Aufgabe 10. Der Gitterpunktsatz von Pick lautet: Sei F der Flächeninhalt eines konvexen Polygons.
i ... Anzahl der Gitterpunkte, die im Inneren liegen
r ... Anzahl der Gitterpunkte, die auf dem Rand liegen
Dann gilt: $F = i + \frac{r}{2} - 1$.
Beweise die Formel mittels Induktion.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Faktorisiere $x^3 - 8$

Aufgabe 2. $A^2 + B^2 < 5$ ist nur für $(0 \mid 0)$; $(1 \mid 0)$; ... wahr.

Aufgabe 3. Betrachte die Gleichung (mod 3)

Aufgabe 4. $x^4 + 4$ lässt sich in ein Produkt von zwei quadratischen Termen zerlegen: $x^4 + 4 = (x^2 + Rx + 2) \cdot (x^2 Sx + 2)$

Aufgabe 5. Auf der rechten Seite enthält die Primfaktorzerlegung nur den Primfaktor 2. Also auch die linke Seite.

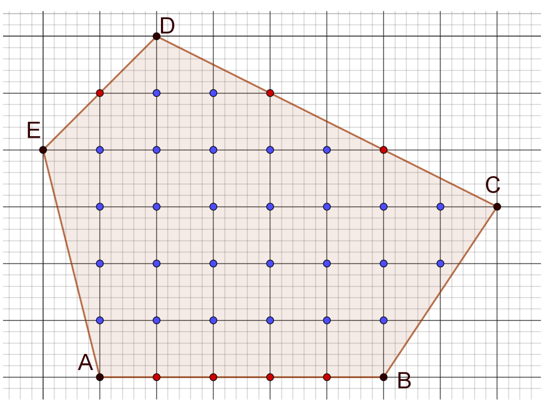
Aufgabe 6. Betrachte die Gleichung (mod 11).
$x^2 - 4 = (x - 2) \cdot (x + 2)$

Aufgabe 7. Zeige, dass sich $a^n - b^n$ restlos durch $a–b$ teilen lässt. $(a, b \in \mathbb{Z})$

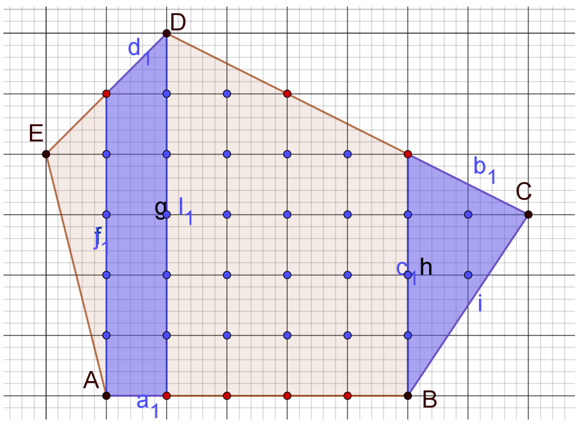
Aufgabe 8. Ein Teil des Peripheriewinkelsatzes besagt, dass der Peripheriewinkel über der Sehne AB genauso groß ist, wie der Winkel zwischen der Sehne AB und der Tangente in A.

Aufgabe 9. Zwei ähnliche Dreiecke sind zu sehen.

Aufgabe 10. Führ zuerst eine Überprüfung des Satzes an einem selbstgewählten Beispiel durch. Zur Illustration möge folgendes Beispiel dienen:



$i = 27$; $r = 12$;



$F = 27 + \frac{12}{2} – 1 = 32$

Pick: Elementare Kontrolle (Zerlegung siehe rechte Skizze):

$$A = \frac{5 \cdot 1}{2} + \frac{5 + 6}{2} \cdot 1 + \frac{6 + 4}{2} \cdot 4 + \frac{4 \cdot 2}{2} = 2,5 + 5,5 + 20 + 4 = 32.$$

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

$x^-8 = (x-2) \cdot (x^2+2x+4)$; also muss eine der beiden Klammern gleich 1 oder -1 sein.
Fall $x-2=1 \Rightarrow x=3 \Rightarrow p=19$
Fall $x-2=-1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow p=7$
Die beiden anderen Fälle führen auf keine Lösung.

Aufgabe 2.

$A^2+B^2<5$ ist für (A,B) aus

$$\{(0 \mid 0);(0 \mid 1);(0 \mid -1);(0 \mid 2);(0 \mid -2);(1 \mid 0);(-1 \mid 0);(2 \mid 0);(-2 \mid 0);(\pm 1 \mid \pm 1)\}$$

Das liefert insgesamt 48 Fälle.

Aufgabe 3.

t	$t^2 \pmod 3$
0	0
1	1
2	1

Die rechte Seite ist $\equiv 0 \pmod 3$. Die linke Seite ist nur $\equiv 0$, wenn sowohl x als auch $y \equiv 0 \pmod 3$ sind.
$\Rightarrow x=3a; y=3b$
$\Rightarrow$ Einsetzen ergibt $9a^2+9b^2=3\cdot(z^2+u^2)$.
Kürzen ergibt $3(a^2+b^2)=(z^2+u^2)$. Dasselbe Argument liefert $z=3c$; $u=3d$. usw.
Wenn es also eine Lösung gibt, so auch weitere kleinere Lösungen. Widerspruch Also gibt es nur die angegebene Triviallösung.

Aufgabe 4.

Wir zerlegen $x^4+4=\underbrace{(x^2-2x+2)}_{A}\cdot\underbrace{(x^2+2x+2)}_{B}$ Ein Faktor muss 1 oder -1 sein.
Vier Fälle: Löst man die entsprechenden quadratischen Gleichungen, so ergibt sich für (A,B) die Lösungsmenge

$$\{(1;5),(-1;5)\}$$

und folglich kann für x nur 1 oder -1 gewählt werden.

Aufgabe 5.

$(1+x)+x^2\cdot(1+x)=(1+x)\cdot(1+x^2)=2^y$
Also müssen beide Klammern Potenzen von 2 sein.

$$1+x=2k$$
$$1+x^2=2l \quad \text{mit} \quad k+l=y$$

Fall $x=0$:

$$1=2^k\ldots k=0; l=0; \Rightarrow y=0$$

$(0 \mid 0)$ ist Lösung
Fall $x>0$:
$x^2>x$; $0<k<l$
x ungerade $\Rightarrow x=2m+1$

$$1+x=2m+2=2(m+1)=2^k \Rightarrow m+1=2^{k-1}$$
$$x^2=4m^2+4m+1$$
$$x^2+1=4m^2+4m+2=2(2m^2+2m+1)=2^l$$
$$2m^2+2m+1=2^{l-1}$$

LS ungerade $\Rightarrow l-1=0$; $l=1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$
Das liefert die Lösung $(1 \mid 2)$

Aufgabe 6.

Betrachtung (mod 4) $x^2-4\equiv 0 \pmod{11}$

$$x-2)\cdot(x+2)\equiv 0(mod 11)$$
$$x_1\equiv 2(mod 11); x_2\equiv -2(mod 11)$$

Lösung

$$x=11u\pm 2 \Rightarrow y=\frac{x^2-4}{11}=\frac{(11u\pm 2\quad)^2-4}{11}=\frac{(121u^2\pm 44u+4-4)}{11}=y=11u^2\pm 4u$$

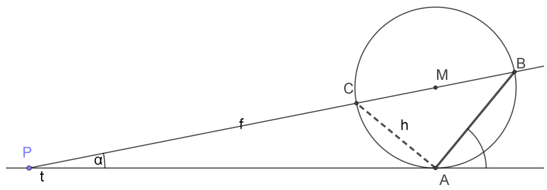
Für x gilt: $1021\leq x\leq 2021$
$1021\leq 11u\pm 2\leq 2021$ Das liefert $93\leq u\leq 83$
Das ergibt $(183-92)\cdot 2=182$ Lösungen im zulässigen Intervall.

Aufgabe 7.

Allgemein gilt: $(a-b)|p(a)–p(b)$
Hinweis zum Beweis:
Bei der Differenzbildung von $p(a)–p(b)$ fällt das konstante Glied weg und jeder Ausdruck a^n-b^n lässt sich restlos durch $a–b$ teilen.
spez.: für $a=5$; $p(5)=0$ und $b=8$; $p(8)=2$ müsste nach diesem Satz $(5-8)|(0-2)$ gelten. Das ist jedoch falsch und somit kann es kein solches Polynom geben.

Aufgabe 8.

Da BC ein Durchmesser ist, ist $< CAB = 90°$ (Thales)
PWS: Für die Sehne AB gilt: $< (AB;t) =< ACB = 5\alpha$
Damit ist auch $< PCA = 180° - 5\alpha$
$< PAC = 180° - (90° + 5\alpha) = 90° - 5\alpha$

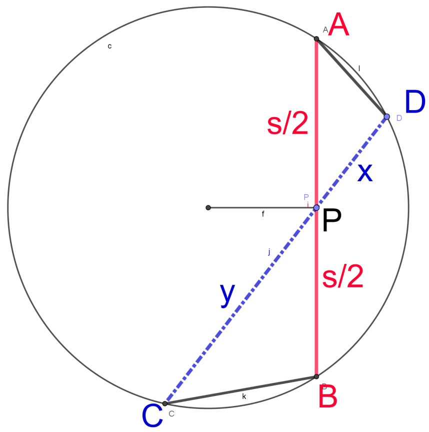


Im Dreieck PAC gilt: $\alpha + 90° - 5\alpha + 180° - 5\alpha = 180\circ$
Somit gilt: $\alpha = 10°$

Aufgabe 9.

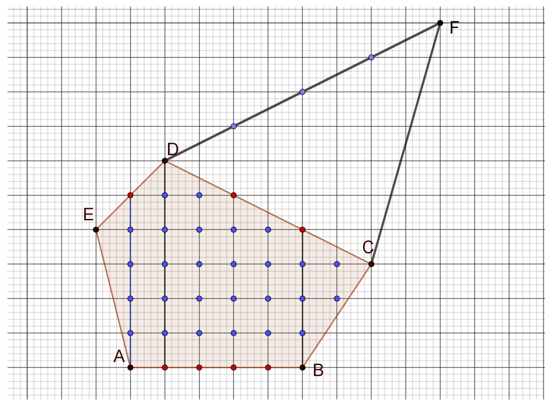
Die Dreiecke PDA und PBC sind ähnlich.
Daher gilt:

$$x : (\frac{s}{2}) = (\frac{s}{2}) : y$$
$$xy = (\frac{s}{2})^2$$
$$\sqrt{xy} = s/2 \leq \frac{x+y}{2}$$
$$AB = s \leq x + y = CD$$



Aufgabe 10.

Für das ursprüngliche Polygon gelte die Picksche Formel und ebenso für das Hinzugefügte, das mit dem ursprünglichen eine Seite gemeinsam hat.
Index $A \ldots$ ALT
Index n neu



Wir zeigen:

$$A_{N+1} = A_N + A_{neu} = (i_A + \frac{r_A}{2} - 1) + (i_n + \frac{r_N}{2} - 1)$$

Entspricht dieser Ausdruck dem Inhalt gemäß der Pick'schen Formel für das $n+1$-Eck?
Sei x die Zahl der Gitterpunkte zwischen C und D.

$$A_{n+1} = (i_A + x + i_n) + \frac{(r_A - x\ ) + r_N - (x+2)}{2} - 1$$

und diese beiden Ausdrücke stimmen überein.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.

siehe [3, 2005], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 3.

siehe [2, S. 43], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 4.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 5.

siehe [4, S. 235], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 6.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 7.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 8.

siehe [1], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 9.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 10.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Literatur

[1] Tom Ballik. *Mathematik-Olympiade (für Anfänger)*. ikon VerlagsGesmbH, 2012.

[2] Arthur Engel. *Problem-solving strategies (Problem Books in Mathematics)*. Springer, 1998.

[3] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2000–2008: Aufgaben und Lösungen*. Nova MD, 2018. Auflage 1.3.

[4] Jiri Herman, Radan Kučera, Radan Kucera, Jaromír Šimša, and Jaromir Simsa. *Equations and inequalities: elementary problems and theorems in algebra and number theory*, volume 1. Springer Science & Business Media, 2000.