52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 16. April2021

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Karl Czakler zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 13. April 2021 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Karl Czakler bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 16. April2021 von 16:20-18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1.
Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 + c^2 = 1$:

$$-\frac{1}{2} \leq ab + bc + ca \leq 1.$$

Aufgabe 2.
Es seien a, b, c positive reelle Zahlen mit $a + b + c = 3$. Beweise

$$(a + c)(b + 1) \leq 4$$

Wann gilt Gleichheit? Ist diese Ungleichung auch richtig, wenn a, b, c reelle Zahlen sind?

Aufgabe 3. Wir betrachten ein Parallelogramm $ABCD$, in dem der Mittelpunkt M der Seite CD auf der Winkelsymmetrale von $\angle BAD$ liegt. Man zeige, dass $\angle AMB$ ein rechter Winkel ist.

Aufgabe 4. Es sei ABC ein Dreieck. Die Mittelpunkte der Seiten BC, AC und AB werden mit D, E bzw. F bezeichnet. Die beiden Schwerlinien AD und BE sollen aufeinander normal stehen und die Längen $\overline{AD} = 18$ und $\overline{BE} = 13;5$ haben.
Man berechne die Länge der dritten Schwerlinie CF dieses Dreiecks.

Aufgabe 5. Beweise, dass die Differenz zweier natürlicher Zahlen, von denen die eine durch beliebiges Umstellen der Ziffern der anderen entsteht, stets durch 9 teilbar ist.

Aufgabe 6. Auf wie viele Arten kann die Zahl 345 als Summe von aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen dargestellt werden?

Aufgabe 7. Die Punkte A und B liegen auf dem Kreis k, AB ist kein Durchmesser. C ist der Schnittpunkt der Tangenten in A bzw. B. Zeige, dass der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC auf k liegt.

Aufgabe 8. Es seien a und b reelle Zahlen mit $ab = 1$. Man bestimme die größte Zahl C, sodass

$$(a-2)^2 + (b-2)^2 \geq C$$

unabhängig von a und b erfüllt ist.

Aufgabe 9. Beginnend mit 1 werden die natürlichen Zahlen der Reihe nach addiert, bis man eine dreistellige Zahl mit gleichen Ziffern erhält. Wie viele Zahlen muss man addieren?

Aufgabe 10. Man zeige für alle positiven x und y:

$$\frac{(x+y)^2}{16} + 1 \geq \sqrt{xy}.$$

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Beachte: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca$

Aufgabe 2: Mittelungleichungen

Aufgabe 3: Überlege wo gleichschenkelige Dreiecke auftreten

Aufgabe 4: Der Schwerpunkt teilt die Schwerlinie im Verhältnis $1 : 2$

Aufgabe 5: Teilbarkeitsregel durch 9!

Aufgabe 6: Verwende die Summenformel

$$1 + 2 + \ldots + (n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

und die Primfaktorzerlegung von $345 = 3 \cdot 5 \cdot 23$.

Aufgabe 7: Peripheriewinkelsatz!

Aufgabe 8: Wähle zunächst geeignete Wert für a und b um C festzulegen. Beweise dann deine Vermutung!

Aufgabe 9: Verwende wieder die Summenformel

$$1 + 2 + \ldots + (n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Aufgabe 10: Verwende $x + y \geq 2\sqrt{xy}$.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Es gilt: $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ und daraus folgt $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \geq 0$. Mit der Bedingung $a^2+b^2+c^2 = 1$ folgt daraus

$$-\frac{1}{2} \leq ab+bc+ca.$$

Die zweite Ungleichung folgt sofort aus $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2 = 1$.

Aufgabe 2.

Mit der geometrisch-arithmetischen Mittelungleichung folgt

$$(a+c)(b+1) \leq \frac{(a+b+c+1)^2}{4} = 4.$$

Gleichheit gilt für $b = 1$ und $a+c = 2$, d.h. für alle Tripel $(t, 1.2-t)$ mit $0 < t < 2$.

Sind a, b, c reelle Zahlen muss man anders vorgehen: Man setzt $a+c = 3-b$ und erhält die Ungleichung

$$(3-b)(1+b) \leq 4.$$

Diese Ungleichung ist äquivalent zu

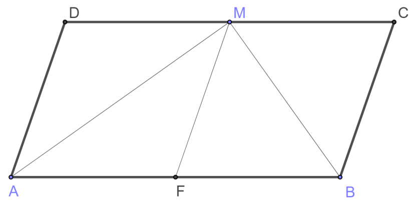
$$0 \leq (b-1)^2.$$

und daher alle reellen Zahlen richtig.

Aufgabe 3.

Es sei F der Mittelpunkt der Seite AB. Da AM die Winkelsymmetrale des Winkel $\angle BAD$ und MF parallel zu AD ist gilt:

$$\angle BAM = \angle MAD = \angle AMF.$$



Daher ist das Dreieck AMF gleichschenkelig und es gilt

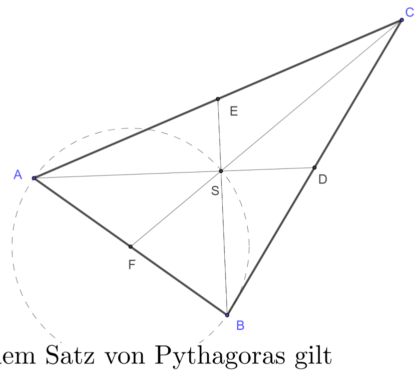
$$BF = AF = MF.$$

Daher liegt M auf einem Halbkreis über der Strecke AB und daher ist $\angle AMB = 90°$

Aufgabe 4.

Die drei Schwerlinien AD, BE und CF schneiden einander im Schwerpunkt S. Es ist bekannt, dass der Schwerpunkt die Schwerlinien im Verhältnis $2:1$ teilt. Daher erhalten wir

$$AS = \frac{2}{3} \cdot AD = 12 \quad \text{und} \quad BS = \frac{2}{3} \cdot BE = 9.$$



Laut Angabe ist ASB ein rechtwinkeliges Dreieck, nach dem Satz von Pythagoras gilt

$$AB = \sqrt{AS^2 + SB^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15.$$

Nach dem Satz von Thales liegt S auf dem Halbkreis über dem Durchmesser AB mit dem Mittelpunkt F. Daher gilt

$$FS = FA = \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{15}{2}.$$

Da $FS : SC = 1 : 2$ gilt, erhalten wir

$$FC = 3 \cdot FS = \frac{45}{2}.$$

Aufgabe 5.

Eine natürliche Zahl lässt bei der Division durch 9 denselben Rest wie ihre Ziffernsumme. Da die Ziffernsummen der beiden Zahlen gleich sind, lassen auch die beiden Zahlen bei der Division durch 9 denselben Rest. Daraus folgt sofort, dass ihre Differenz durch 9 teilbar ist.

Aufgabe 6.

Es sei

$$a + (a+1) + (a+2) + \ldots + (a + (k-1)) = ka + \frac{k(k-1)}{2}$$

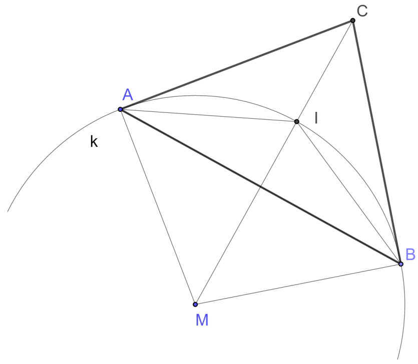
mit einer ganzen Zahl $k \geq 2$ eine solche Summe. Dann gilt

$$k(2a + k - 1) = 2 \cdot 345 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 23.$$

Wegen $k \leq 2a + k - 1$ kommen für k nur die Wert $2, 3, 5, 6, 10, 15$ und 23 in Frage. Es gibt daher 7 solche Summen.

Aufgabe 7.

Sei M der Mittelpunkt des Kreises k. Der Schnittpunkt von CM mit k sei I. Da das Dreieck ACB ist gleichschenkelig ist, genügt es zu zeigen, dass AI den Winkel $\angle BAC$ halbiert.



Mit dem Peripheriewinkelsatz gilt

$$\angle CAI = \angle ABI$$

und aus Symmetiegründen gilt

$$\angle ABI = \angle IAB.$$

Daher halbiert AI den Winkel $\angle BAC$.

Aufgabe 8.

Setzt man $a = 1$ und $b = 1$ so erhält man $C \leq 2$. Wir vermuten, dass

$$(a-2)^2 + (b-2)^2 \geq 2$$

für alle reellen Zahlen a und b mit $ab = 1$ gilt. Diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} a^2 - 4a + 4 + b^2 - 4b + 4 &\geq 2 \\ a^2 + b^2 + 6 - 4(a+b) &\geq 0 \\ (a+b)^2 - 2ab + 6 - 4(a+b) &\geq 0 \\ (a+b)^2 - 4(a+b) + 4 &\geq 0 \\ (a+b-2)^2 &\geq 0, \end{aligned}$$

und damit ist alles gezeigt.

Aufgabe 9.

Nach der Voraussetzung muss gelten:

$$\frac{n(n+1)}{2} = a \cdot 111 \quad \text{mit} \quad 1 \leq a \leq 9.$$

Wegen der Primfaktorzerlegung von $111 = 3 \cdot 37$ folgt

$$n(n+1) = a \cdot 2 \cdot 3 \cdot 37.$$

Da die gesuchte Zahl dreistellig ist, muss das Produkt $n(n+1)$ kleiner als 2000 sein, also n kleiner als 45 ($45 \cdot 46 = 2070, 44 \cdot 45 = 1980$). Da das Produkt auch durch 37 teilbar ist, kommen nur die Werte 36 und 37 in Frage. Für $n = 37$ erhält man einen Widerspruch, da $37 \cdot 38$ nicht durch 3 teilbar ist. Für $n = 36$ erhält man 666. Man muss also die ersten 36 natürlichen Zahlen addieren, um eine dreistellige Zahl mit gleichen Ziffern zu erhalten.

Aufgabe 10.

Wir verwenden die arithmetisch- geometrische Ungleichung $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ und verschärfe die Ungleichung indem wir $2\sqrt{xy}$ einsetzen.

$$\frac{(2\sqrt{xy})^2}{16} + 1 \geq \sqrt{xy}.$$

Das ist äquivalent zu

$$xy - 4\sqrt{xy} + 4 \geq 0$$

also zu

$$(\sqrt{xy} - 2)^2 \geq 0.$$

Gleichheit gilt für $x = y = 2$.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

siehe [2], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 2.

siehe [1], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 3.

siehe [4], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 4.

siehe [3], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 5.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 6.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 7.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 8.

Unbekannte Quelle, bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 9.

siehe [5], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 10.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Literatur

[1] Art of Problem Solving. https://artofproblemsolving.com/community. (aufgerufen am 03.05.2021).

[2] Aufgaben zur Mathematik Olympiade. https://www.olympiade-mathematik.de/. (aufgerufen am 03.05.2021).

[3] Junior-Regionalwettbewerb 2014. https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/82. (aufgerufen am 03.05.2021).

[4] Junior-Regionalwettbewerb 2017. https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/329. (aufgerufen am 03.05.2021).

[5] Gerhard Kirchner. Leitfaden für den JRW (Junior-Regionalwettbewerb). https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/90. (aufgerufen am 03.05.2021).