52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 23. April 2021

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Josef Pech zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 20. April 2021 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Josef Pech bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 23. April 2021 von 16:20-18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1. ABC sei ein rechtwinkeliges Dreieck ($\angle ABC = 90°$) mit $AB = 18$; $AC = 30$. Die Winkelsymmetrale des Winkels $\angle CAB$ schneidet BC in D. Die Normale auf AC durch D schneidet AC in E. Bestimme den Inhalt des Dreiecks CED.

Aufgabe 2. In einem Trapez $ABCD$ (AB ist parallel zu CD) sei S der Schnittpunkt der beiden Diagonalen. Die Dreiecke CDS, ASD, ABS, BCS werden mit I_1, I_2, I_3, I_4 bezeichnet. Der Inhalt von I_1 beträgt 80% von I_2. Der Inhalt von I_4 beträgt 60cm^2. Wie groß ist der Inhalt von I_3?

Aufgabe 3. Der Umkreis des gleichseitigen Dreiecks ABC sei k. P liegt auf dem Kreisbogen $\widehat{BC}$, der A nicht enthält. Zeige: $PA = PB + PC$.

Aufgabe 4. $x^2 + y^2 = 3$ ist die Gleichung eines Kreises k. Zeige, dass der Kreis keinen Punkt enthält, dessen (beide) Koordinaten rationale Zahlen sind.

Aufgabe 5. Zeige, dass für alle reellen Zahlen a mit $a \geq -1$ und $a \neq 0$ $a + \frac{4}{a^2} \geq 3$ gilt:

Aufgabe 6. Zeige: Ein Viereck $ABCD$ hat genau dann senkrechte Diagonalen, wenn $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$ gilt.

Aufgabe 7. Beweise: $6 | x + y + z \Rightarrow 6 | x^3 + y^3 + z^3$

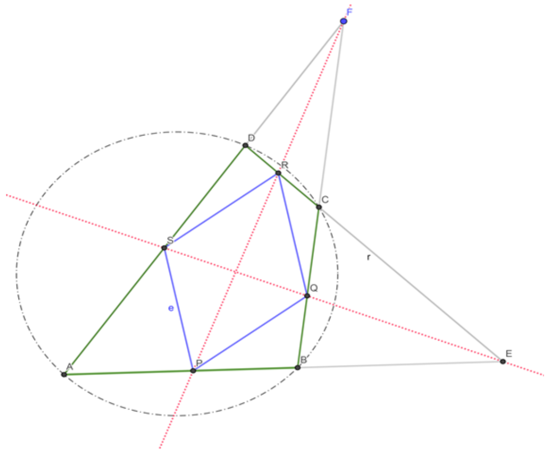
Aufgabe 8.
Zeige: Für jede natürliche Zahl $n > 1$ gilt

$$\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < n$$

Aufgabe 9. Für welche natürliche Zahl n ist $3^n - n^2$ eine Primzahl?

Aufgabe 10.

Ein Sehnenviereck $ABCD$ hat die Eigenschaft, dass gegenüberliegende Seiten nicht parallel sind. Die Verlängerungen der Seiten AB und DC schneiden sich in E (Skizze). Die Verlängerungen von AD und BC schneiden sich in F. In den Winkeln $\angle AED$ und $\angle BFA$ werden die Winkelsymmetralen s_E und s_F eingezeichnet. Die Schnittpunkte von s_E mit den Seiten BC bzw. AD seinen Q bzw. S und die Schnittpunkte von s_F mit AB bzw. CD seien P bzw. R.



Zeige, dass $PQRS$ ein Rhombus ist.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Verwende Ähnlichkeit!

Aufgabe 2. Für zwei Dreiecke, die dieselbe Höhe haben, gilt: Die Inhalte verhalten sich wie ...

Aufgabe 3. Verwende den Satz von Ptolemäus.

Aufgabe 4. Zuerst $(\frac{a}{b}|\frac{c}{d})$ einsetzen und dann die Gleichung (mod 3) betrachten.

Aufgabe 5. Term faktorisieren.

Aufgabe 6. Diagonalenabschnitte entsprechend bezeichnen und den Satz von Pythagoras einsetzen.

Aufgabe 7. Ist zu einfach für einen Hinweis.

Aufgabe 8. Ersetzt man jeden der n Summanden durch (i) den kleinsten (b) den größten Summanden, dann erhält man ....

Aufgabe 9. Unterscheide die beiden Fälle a) n gerade, b) n ungerade

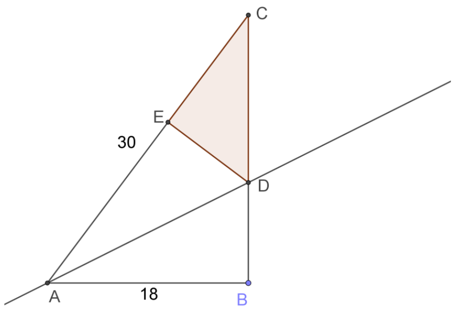
Aufgabe 10. Verwende den Peripheriewinkelsatz und bestimme einige Winkel bzw. verwende die Winkelsumme im Dreieck

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

$BC = \sqrt{30^2 - 18^2} = 24$
$\triangle ABC \approx \triangle DEC \Rightarrow BD : DC = 18 : 30 = 3 : 5$
$BD = 3t$; $DC = 5t$; $BC = 8t$; $t = 3$; $BD = 9$; $DC = 15$
$\triangle DEC \approx \triangle ABC \Rightarrow DE : CD = 18 : 30 = 3 : 5$
$DE = 3u$; $CD = 5u$; $u = 3$; $DE = 9$; $EC = 12$
$A_{CDE} = \frac{ED \cdot EC}{2} = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54$

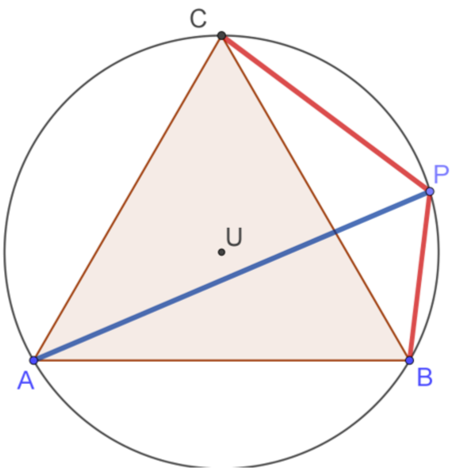


Aufgabe 2.

$I_1 : I_2 = I_4 : I_3$; $I_1 : I_2 = 0,8$; $I_3 = \frac{60}{0,8} = 75$
$I_1 = 0,8 \cdot I_2$

Aufgabe 3.

Im Sehnenviereck (Satz des Ptolemäus) gilt: $ac + bd = ef$
spez.: $a \cdot PC + PB \cdot a = PA \cdot a$ woraus schon
$PC + PB = PA$ folgt.



Aufgabe 4.

Ang.: $x_1 = \frac{a}{b}$; $y_1 = \frac{c}{d}$ sind Lösungen der Gleichung mit a, b, c, d ganzzahlig und $b \neq 0$; $d \neq 0$.
$a^2d^2 + b^2c^2 = 3b^2d^2$ $u^2 + v^2 = 3w^2$ in ganzen Zahlen $u := ad$;$v := bc$, $w := bd$

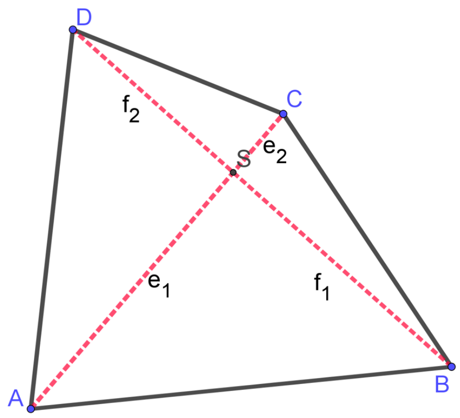
a	$t^2 \pmod 3$
0	0
1	1
2	1

Betrachte die Gleichung $\pmod 3$. $u^2 + v^2 \equiv 0 \pmod 3$ Das geht nur, wenn $u \equiv 0$ und $v \equiv 0$
$u = 3k$; $v = 3l$ liefert $9k^2 + 9l^2 = 3w^2$; $3k^2 + 3l^2 = w^2$; $3|w$ $w = 3m$; $k^2 + l^2 = 3m^2$ ist die Gleichung in ganzen Zahlen
Somit: Aus einer ev. vorhandenen Lösung in (u,v,w) erhalten wir eine kleinere Lösung in (k,l,m)
„unendlicher Abstieg“$\Rightarrow$ ist nicht möglich.
(0;0;0) ist keine Lösung
$\Rightarrow$ Es gibt keine ganzzahlige Lösung und somit auch keine rationale Lösung der gegebenen Gleichung.

Aufgabe 5.

Multiplikation mit a^2 ergibt $a^3 + 4 \geq 3a^2$
$a^3 - 3a^2 + 4 \geq 0$ hat die Zerfällung $(a+1) \cdot (a^2 - 4a + 4) \geq 0$
also $(a+1) \cdot (a-2)^2 \geq 0$. Das ist eine wahre Aussage, weil:
Die erste Klammer ist wegen der Bedingung nichtnegativ und die zweite Klammer ist ein Quadrat.

Aufgabe 6.



Seien alle Teildreiecke rechtwinkelig. Dann gilt:

$$AB^2 = e_1^2 + f_1^2$$
$$CD^2 = e_2^2 + f_2^2$$

Zusammen $AB^2 + CD^2 = e_1^2 + f_1^2 + e_2^2 + f_2^2$

$$BC^2 = e_2^2 + f_1^2$$
$$AD^2 = e_1^2 + f_2^2$$

Zusammen $BC^2 + AD^2 = e_2^2 + f_1^2 + e_1^2 + f_2^2$ und die beiden Summen sind gleich.

Aufgabe 7.

Da $2|S_1$ sind entweder alle drei Zahlen gerade, dann auch S_3 oder zwei sind ungerade und eine gerade, dann gilt dies auch für S_3.

Für den Modul $m \equiv 3$ beachten wir die Tabelle

x	y	z	x^3	y^3	z^3	S_3
0	0	0	0	0	0	0
0	1	2	0	1	2	0
1	1	1	1	1	1	0
2	2	2	2	2	0	0

S_3 ist in jedem Fall $\equiv 0$ und andere Fälle, für die auch $S_1 \equiv 0$ gilt, gibt es nicht. Klarerweise kommt es auf die Reihenfolge nicht an.

Aufgabe 8.

a) Ersetzt man jeden Summanden durch einen kleineren (nämlich durch $\frac{1}{\sqrt{n}}$), so erhält man $\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$ und die linke Ungleichung ist gezeigt.

b) Ersetzt man jeden Summanden durch einen größeren (nämlich durch $\frac{1}{\sqrt{1}}$), so erhält man $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1}} = n$ und die rechte Ungleichung ist gezeigt.

Aufgabe 9.

1.Fall: n ist gerade
$n = 2k$

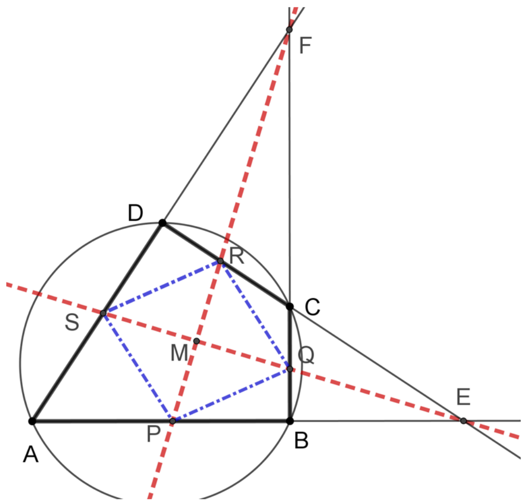
$$3^{2k} – (2k)^2 = (3^k - 2k) \cdot (3^k + 2k) = p$$
$$\Rightarrow 3^k - 2k = 1 \text{ und}$$
$$3^k + 2k = p$$

$3^k = 2k + 1$ hat die Lösungen $k = 0$ und $k = 1$.
Ab $k = 2$ ist $3^k > 2k + 1$ (Bew. V.I.)
Für $k = 0$ wäre $p = 1$ ist nicht prim.
Für $k = 1$ und folglich $n = 2$ ist $p = 5$ Lösung!

2.Fall: n ist ungerade
Dann ist $3^n – n^2$ als Differenz von zwei ungeraden Zahlen gerade und somit 2.
$3^n – n^2 = 2$ bzw. $3^n = n^2 + 2$
$n = 1 \Rightarrow p = 2$ Lösung
Für $n > 1$ ist $3^n > n^2 + 2$ (Bew. V.I.) und es gibt keinen weiteren Lösungsfall.
$L_n = \{1, 2\}$ mit $L_p = \{2; 5\}$

Aufgabe 10.

Die Winkel in den Eckpunkten A, B, C, D werden wie üblich mit α, β, γ, δ bezeichnet. Die Winkel $\angle BFA$ und $\angle AED$ werden mit 2φ und 2ω bezeichnet.



$$\triangle BEC: \quad \alpha + 180° - \beta + 2\omega = 180° \Rightarrow \alpha = \beta - 2\omega$$
$$\triangle CFD: \quad \alpha + \beta + 2\varphi = 180° \Rightarrow \beta - 2\omega + \beta + 2\varphi = 180°$$
$$2\beta + 2\varphi - 2\omega = 180°$$
$$\beta + \varphi - \omega = 90° \Rightarrow \beta + \varphi = 90° + \omega$$
$$\angle FPB = 180° - (\beta + \varphi) = 180° - (90° + \omega) = 90° - \omega$$
$$\triangle PEM: \quad 90° - \omega + \omega + \angle EMP = 180°$$
$$\Rightarrow \angle EMP = 90°$$

Deshalb ist das Dreieck SQF gleichschenkelig, weil die Winkelsymmetrale rechtwinkelig auf SQ steht. $\Rightarrow FS = FQ \Rightarrow RS = RQ$

Eine völlig gleiche Argumentation liefert $ER = EP \Rightarrow QR = QP$ und somit ist das Viereck $PQRS$ ein Rhombus.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 5.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 6.

siehe [2, S. 293], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 7.

siehe [2, S. 131], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 8.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 9.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 10.

siehe [1, 2019], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Literatur

[1] Archivierte Aufgaben der Deutschen Mathematik-Olympiade. https://www.mathematik-olympiaden.de/moev/index.php/aufgaben/aufgabenarchiv. (aufgerufen am 05.05.2021).

[2] Arthur Engel. *Problem-solving strategies (Problem Books in Mathematics)*. Springer, 1998.