52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 30. April 2021

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Karl Czakler zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 27. April 2021 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Karl Czakler bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 30. April 2021 von 16:20-18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1.
Es seien a, b, c positive ganze Zahlen für die gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- $a + b > c$
- $a \neq b$
- c ist ungerade
- c ist nicht durch 7 teilbar
- Das Produkt ab ist ungerade

Aufgabe 2.
Bestimme alle Paare (a, b) positiver ganzer Zahlen für die

$$ab + 2 = a^3 + 2b$$

gilt.

Aufgabe 3. Bestimme die kleinste positive ganze Zahl n, für die $10n$ eine Quadratzahl und $6n$ eine Kubikzahl ist.

Aufgabe 4. Auf der Tafel stehen 51 verschiedene positive ganze Zahlen kleiner oder gleich 100. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- Es gibt zwei aufenanderfolgende Zahlen.
- Es gibt zwei Zahlen mit der Differenz 50.
- Es gibt zwei Zahlen mit der Summe 100.
- Es gibt sechs Zahlen mit derselben Einerziffer.

Aufgabe 5.
Seien a und b ganze Zahlen. Sei

$$a = a^2 + b^2 - 8b - 2ab + 16.$$

Beweise, dass a eine Quadratzahl ist.

Aufgabe 6.
Man beweise, dass es keine ganzen Zahlen x und y gibt, sodass $3x^2 + y^2 = 777777$ gilt.

Aufgabe 7. Die Punkte A und B liegen auf dem Kreis k, AB ist kein Durchmesser. C ist der Schnittpunkt der Tangenten in A bzw. B. Zeige, dass der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC auf k liegt.

Aufgabe 8. Beweisen Sie, daß es keine natürliche Zahl n gibt, für die die Zifferndarstellung der Zahl $9^n + 1$ auf mehr als eine Null endet!

Aufgabe 9. Die Kreise k_1 mit Mittelpunkt M_1 und k_2 mit Mittelpunkt M_2 schneiden sich in zwei Punkten A und B. Die Gerade AM_1 schneidet den Kreis k_1 in den Punkten A und C, die Gerade AM_2 schneidet den Kreis k_2 in den Punkten A und D.
Man zeige, dass die Geraden CD und M_1M_2 parallel sind und dass B auf CD liegt.

Aufgabe 10. Auf einer Tafel stehen die Zahlen $1, 2, \ldots, 10$ Man führt folgende Operation aus: Man wählt zwei Zahlen aus, schreibt den Betrag ihrer Differenz auf die Tafel und löscht die beiden gewählten Zahlen.
Das wiederholt man solange, bis nur noch eine Zahl auf der Tafel steht.

(a) Man zeige, dass 1 als letzte Zahl auf der Tafel stehen kann.

(b) Man zeige, dass 2 nicht als letzte Zahl auf der Tafel stehen kann.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1.

Aufgabe 2: Drücke b durch a aus!

Aufgabe 3: Primfaktorzerlegung!

Aufgabe 4: zu Teil 4: Dividiert man eine Zahl durch 10, dann ist die Einerziffer ihr Rest. Es gibt 10 verschiedene Reste bei der Division durch 10, also 10 Restklassen. Wie kann man die 51 Zahlen nun auf diese Restklassen verteilen?

Aufgabe 5: Betrachte die entsprechende quadratische Gleichung in der Variablen b.

Aufgabe 6: Betrachte die Gleichung modulo 3.

Aufgabe 7: Peripheriewinkelsatz!

Aufgabe 8: Welche Eigenschaft hat eine Zahl, die auf mindestens zwei Nullen endet?

Aufgabe 9:
Zeige zuerst, dass CD parallel zu M_1M_2 ist

Aufgabe 10: Überlege,was bei den Operationen unverändert bleibt!

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

richtig,richtig,falsch,richtig,falsch

Aufgabe 2.

$a = 2$ führt auf einen Widerspruch, wir dürfen daher $a \neq 2$ annehmen. Folgende Aussagen sind dann zur gegebenen Gleichung äquivalent:

$$\begin{aligned} b(a-2) &= a^3 - 2 \\ b &= \frac{a^3-2}{a-2} \\ b &= a^2 + 2a + 4 + \frac{6}{a-2} \end{aligned}$$

Da a und b positive ganze Zahlen sind, kommen für a nur die Werte $1, 3, 4, 5$ und 8 in Frage. Daher haben wir als Lösungen die Zahlenpaare $(1, 1), (3, 25), (4, 31), (5, 41)$ und $(8, 85)$

Aufgabe 3.

$10n$ ist eine Quadratzahl ist. Daher muss $n = 10k^2$ sein, wobei k eine möglichst kleine positive ganze Zahl ist.
Wir wissen weiters, dass $6n = 60k^2 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot k^2$ eine Kubikzahl ist. Daraus folgt $k^2 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^{2p}$, wobei wir das p so wählen müssen, dass einerseits p möglichst klein ist und andererseits $2+2p$ durch 3 teilbar ist. Daraus folgt $p = 2$ und $k^2 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^4 = 3600$. Die gesuchte Zahl n ist daher 36000.
$(10n = 360000 = 600^2, 6n = 216000 = 60^3.)$

Aufgabe 4.

richtig, richtig, falsch,richtig

Aufgabe 5.

$$b^2 - b(2a+8) + a^2 - a + 16 = 0.$$

Die Diskriminante muss eine Quadratzahl sein.

$$(2a+8)^2 - 4(a^2 - a + 16) = m^2 \implies 36a = m^2$$

Aus $36a = m^2$ folgt, dass m^2 durch 2 und 3 teilbar ist. Daher ist m durch 6 teilbar, also $m = 6k$ und es folgt

$$36a = 36k^2 \implies a = k^2.$$

Andere Lösung: Die gegebene Gleichung ist äquivalent zu

$$9a = (b - a - 4)^2$$

und daher ist a eine Quadratzahl.

Aufgabe 6.

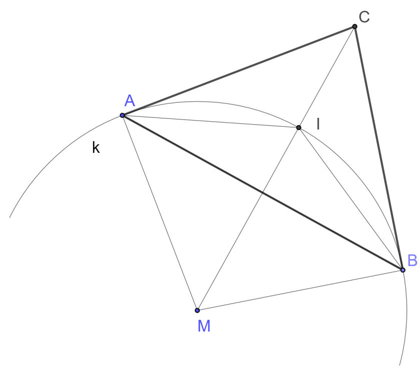
Wir betrachten die Gleichung modulo 3. Es gilt $777777 \equiv 0 \pmod 3$ und $3x^2 \equiv 0 \pmod 3$. Daher ist y durch 3 teilbar, also gilt $y = 3k$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Die Gleichung lautet dann

$$x^2 + 3k^2 = 259259.$$

Da $259259 \equiv 2 \pmod 3$, $3k^2 \equiv 0 \pmod 3$ und 2 kein quadratischer Rest modulo 3 ist, folgt, dass die Gleichung keine Lösung besitzt.

Aufgabe 7.

Sei M der Mittelpunkt des Kreises k. Der Schnittpunkt von CM mit k sei I. Da das Dreieck ACB ist gleichschenkelig ist, genügt es zu zeigen, dass AI den Winkel $\angle BAC$ halbiert.



Mit dem Peripheriewinkelsatz gilt

$$\angle CAI = \angle ABI$$

und aus Symmetiegründen gilt

$$\angle ABI = \angle IAB.$$

Daher halbiert AI den Winkel $\angle BAC$.

Aufgabe 8.

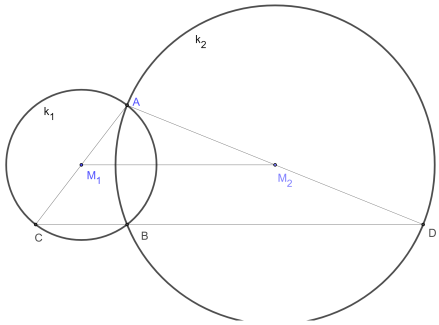
$9^n + 1$ ist für alle n nicht durch 4 teilbar. Daher kann diese Zahl für kein n durch 100 teilbar sein.

Aufgabe 9.

Wegen

$$AM_1 : M_1C = AM_2 : M_2D = 1 : 1$$

ist CD parallel zu M_1M_2. Da M_1M_2 normal auf AB steht, ist auch CD normal auf AB. Daher gilt mit dem Satz von Thales, dass B auf CD liegt.



Aufgabe 10.

(a) Wir wählen folgende 5 Zahlenpaare aus:

$$(1, 2);\ (3, 4);\ \ldots;\ (9, 10).$$

Für jedes dieser Paare ist der Betrag ihrer Differenz 1, somit stehen 5 mal die Zahl 1 auf der Tafel. Im nächsten Schritt wählen wir die 2 Zahlenpaare $(1, 1)$ und bildet für jedes Paar die Differenz. Dann stehen 1 und 2 mal die Zahl 0 auf der Tafel. Da $1 - 0 = 1$ ist 1 als letzte Zahl möglich.
Bemerkung: Die Zahlenpaare sind relativ willkürlich gewählt, es sind zahlreiche Varianten möglich.

(b) Wir zeigen die allgemeinere Aussage, dass keine gerade Zahl als letzte Zahl möglich ist. Es gilt

$$a - b \equiv a + b \pmod 2,$$

somit bleibt die Parität der Summe der auf der Tafel stehenden Zahlen bei jeder Operation erhalten. Mit der Gaußschen Summenformel ist die Summe der zu Beginn auf der Tafel stehenden Zahlen

$$\frac{10 \cdot 11}{2} = 55$$

eine ungerade Zahl, also muss auch die letzte Zahl eine ungerade Zahl sein. Daher ist insbesondere 2 unmöglich.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.

siehe [3], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 3.

siehe [4, 2007], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 4.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 5.

siehe [3], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 6.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 7.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 8.

siehe [1], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 9.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 10.

siehe [2, 2021], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Literatur

[1] Aufgaben zur Mathematik Olympiade. https://www.olympiade-mathematik.de/. (aufgerufen am 03.05.2021).

[2] Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene 2021. https://oemo.at/OeMO/Downloads/90/. (aufgerufen am 03.05.2021).

[3] Arthur Engel. *Problem-solving strategies (Problem Books in Mathematics)*. Springer, 1998.

[4] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2000–2008: Aufgaben und Lösungen.* Nova MD, 2018. Auflage 1.3.