52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 07. Mai 2021

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Josef Pech zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 04. Mai 2021 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Josef Pech bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 07. Mai 2021 von 16:20-18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1. Wie viele dreiziffrige Zahlen n haben folgende Eigenschaft:
Die Zahl n ist durch 9 teilbar und das Produkt der drei Ziffern ist auch durch 9 teilbar.

Aufgabe 2. Welche Bedingung für ein konvexes Viereck mit vorgegebenen Diagonallängen e und f muss gelten, damit der Flächeninhalt maximal ist?

Aufgabe 3. Über den Seiten BC und AC eines Dreiecks ABC werden die Quadrate mit den Mittelpunkten P und Q nach außen gezeichnet. Sei H der Mittelpunkt der Seite AB. Zeige, dass das Dreieck PHQ rechtwinkelig und gleichschenkelig ist.

Aufgabe 4. Ermittle alle Primzahlen p so, dass auch die Zahlen $p+4$, $p+10$, $p+12$, $p+22$, $p+30$, $p+34$ Primzahlen sind.

Aufgabe 5. Löse die Gleichung $\left\lfloor \frac{2x^2}{x^2+1} \right\rfloor = x$ in den reellen Zahlen.
Dabei ist $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x.

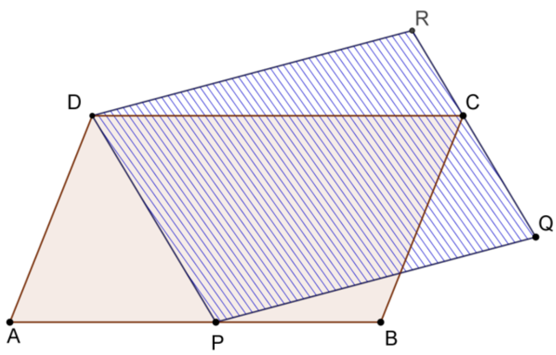
Aufgabe 6. Löse in den ganzen Zahlen $5x^2 = 4 \cdot (29 - y^2)$

Aufgabe 7. Zeige, dass für $x \geq -4$ gilt: $x^3 - 12x + 16 \geq 0$
Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 8. Zeige: $4x^2 - 2y^2 + 8z = 3$ ist in den ganzen Zahlen nicht lösbar.

Aufgabe 9.

Zeige, dass die beiden Parallelogramme $ABCD$ und $PQRD$ flächengleich sind. Dabei liegt P auf AB und C auf QR.



Aufgabe 10.
Zeige, dass in einem Dreieck ABC die Verbindung der Fußpunkte der Normalen auf die Winkelsymmetralen w_α und w_β durch den Eckpunkt C parallel zur Seite AB ist.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Es gibt mehr als 40 solche Zahlen.

Aufgabe 2. Zielführend ist es, den Flächeninhalt mit der entsprechenden Formel anzuschreiben.

Aufgabe 3. Sicher sind die Verbindungen von Seitenhalbierungspunkten parallel zu den Seiten.

Aufgabe 4. Die Anzahl der angesprochenen Zahlen enthält einen Hinweis.

Aufgabe 5. Für die reelle Zahl x gibt es eine starke Einschränkung.

Aufgabe 6. Da die linke Seite positiv ist ($x = 0$ kann keine Lösung sein), muss die rechte Seite auch diese Bedingung erfüllen. Also bleiben nur noch wenige Möglichkeiten.

Aufgabe 7. Faktorisiere!

Aufgabe 8. Betrachte die Gleichung (in 3 Variablen!) modulo 8.

Aufgabe 9. Zwei Parallelogramme mit derselben Basisseite sind sicher flächengleich, wenn .... Diesen Satz zweimal anwenden und der Beweis ist fertig.

Aufgabe 10. Eine gute Skizze, die die Angabe richtig darstellt, ist nötig. Der Rest ist einfach.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

a	b	c	#
1	0	8	
⋮	⋮	⋮	
8	0	1	8
1	8	0	
⋮	⋮	0	
8	1	0	8
9	0	0	1
9	9	0	
9	0	9	2
9	9	9	1

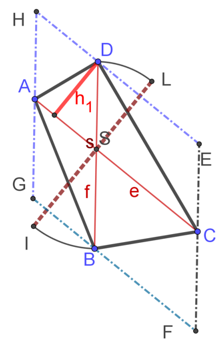
a	b	c	#
9	1	8	
⋮	⋮	⋮	
9	8	1	8
1	9	8	
⋮	⋮	⋮	
8	9	1	8
1	8	9	
⋮	⋮	⋮	
8	1	9	8
3	3	3	1
6	6	6	1

Gesamt $\#_g = 46$

Aufgabe 2.

Welche Bedingung für ein konvexes Viereck mit vorgegebenen Diagonallängen e und f muss gelten, damit der Flächeninhalt maximal ist?

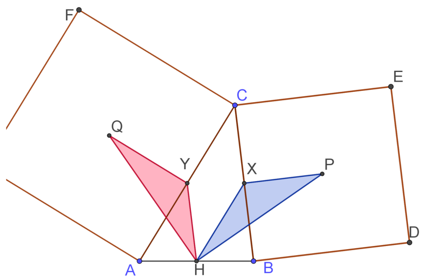
Da der Flächeninhalt des Dreiecks ACD kleiner als der Inhalt von ALC (SL steht normal auf AC), ist der Inhalt maximal, wenn e normal auf f steht. SL geht durch Drehung aus SD hervor. Dasselbe gilt für das Dreieck ABC.



h_1 steht normal auf e.

Für Vierecke mit aufeinander normal stehenden Diagonalen gilt: $A = \frac{e \cdot f}{2}$

Aufgabe 3.



Seien X, Y Mittelpunkte von BC bzw. AC
Beh.: $\triangle QHP$ ist gleichschenkelig und rechtwinkelig
Bew.: α, β, γ seien die Innenwinkel des Dreiecks ABC in üblicher Bezeichnung. Da $YH||BC$ und $XH||AC$, $\angle AHY = \beta$ und $\angle XHB = \alpha$. Somit $\angle YHX = \gamma$.

Sei $\angle XPH = \omega$. $\angle HXB = \gamma$.
$\angle PXH = 90° + \gamma$. Ebenso $\angle QYH = 90° + \gamma$ und die beiden Seiten (=Schenkel des entsprechenden Winkels) sind $\frac{b}{2}$ bzw. $\frac{a}{2}$. Also sind die beiden Dreiecke PXH und QYH kongruent. Folglich gilt $HP = HQ$ (gleichschenkelig) XP steht normal auf a und YH ist parallel zu a. Also stehen jeweils gleichlange Seiten der beiden Dreiecke aufeinander normal. Somit gilt QH normal auf HP.

Aufgabe 4.

Wir betrachten die 7 Zahlen
p, $p+4$, $p+10$, $p+12$, $p+22$, $p+30$, $p+34$ (modulo 7) und stellen fest, dass keine zwei in ein und derselben Restklasse (mod 7) liegen.
Läge p in 0, dann lägen die anderen (in der angegebenen Reihenfolge) in 4, 3, 5, 1, 2, 6 (mod 7).
Eine der angegebenen Zahlen muss also in der Restklasse 0 liegen. das kann nur p oder $p+4$ sein.
Für $p = 7$ sind die anderen Zahlen 11, 17, 19, 29, 37, 41 (alle prim).
Für $p + 4 = 7$ gilt $p = 3$ und $p + 12$ ist keine Primzahl. Somit ist die Lösung $p = 7$.

Aufgabe 5.

Offenbar ist x eine ganze Zahl. Wir schreiben $x \in \mathbb{Z}$

$$n \leq \frac{2n^2}{n^2+1} < n + 1|(n^2+1)$$

Beachte, dass $\frac{2n^2}{n^2+1} \geq 0 \Rightarrow n \geq 0$

$$\underbrace{n^3 + n \leq 2n^2}_{i}$$

$$\underbrace{2n^2 \leq n^3 + n^2 + n + 1}_{ii}$$

$$\Rightarrow n^3 + n \leq 2n^2 \leq n^3 + n^2 + n + 1$$

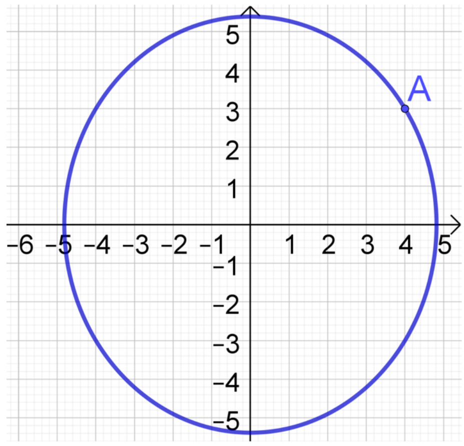
i) $n^3 + n \leq 2n^2$
$n(n^2 - 2n + 1) \leq 0$
Das ist nur für $n = 0$ und für $n = 1$ möglich.

ii) ist für $n = 0$ und für $n = 1$ erfüllt.

$\Rightarrow L = \{0; 1\}$

Aufgabe 6.

$$5x^2 \leq 116 \qquad \Rightarrow |x| < 5$$
$$-4 \leq x \leq 4 \text{ und } -5 \leq y \leq 5$$



Bem.: Wenn $(x;y)$ Lösung ist, dann sind alle 4 Zahlenpaare $(\pm x; \pm y)$ Lösungen.
Wir brauchen also nur nach den nichtnegativen Lösungszahlen suchen.
$x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ keine Lösung
$x = 4 \Rightarrow y = 3$
$L = \{(\pm 4; \pm 3)\}$

Aufgabe 7.

$x^3 - 12x + 16 = (x-2)^2 \cdot (x+4) \geq 0$ und das ist für $x \geq -4$ erfüllt.
Gleichheit liegt für $x = 2$ und für $x = -4$ vor.

Aufgabe 8.

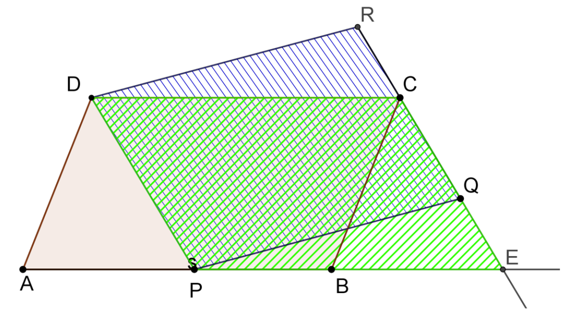
$$\begin{cases} 0 \\ 1 \\ 4 \end{cases} - \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases} + 0 \equiv 3 \pmod 8$$

Beachte: Die Schreibweise (links) ist keine Vektordarstellung, sondern soll nur alle Möglichkeiten in beliebiger Reihenfolge darstellen.
Die linke Seite liefert jedoch nur Elemente aus $\{0, 1, 2, 4, 6, 7\}$. Also ist die Gleichung in den ganzen Zahlen nicht lösbar.

t	t^2	$2t^2$
0	0	0
1	1	2
2	4	0
3	1	2
4	0	0
5	1	2
6	4	0
7	1	2

Aufgabe 9.

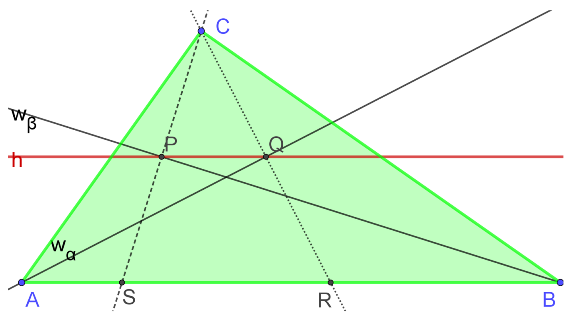
Das Parallelogramm $PECD$ („Zwischenschritt“) ist flächengleich dem gegebenen Parallelogramm und auch $PQRD$.



Aufgabe 10.

Die beiden rechtwinkeligen Dreiecke AQC und AQR sind kongruent, da sie in einer Kathete und einem Winkel übereinstimmen. Also gilt $QC = QR$ und folglich liegt Q in halber Höhe des Dreiecks ABC. Dass selbe gilt für die beiden Dreiecke BPS und BPC.

$$\Rightarrow PQ||AB$$



Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 5.

siehe [1, 1990], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 6.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 7.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 8.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 9.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 10.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Literatur

[1] Archivierte Aufgaben der Deutschen Mathematik-Olympiade. `https://www.mathematik-olympiaden.de/moev/index.php/aufgaben/aufgabenarchiv`. (aufgerufen am 10.05.2021).