52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 14. Mai 2021

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Karl Czakler zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

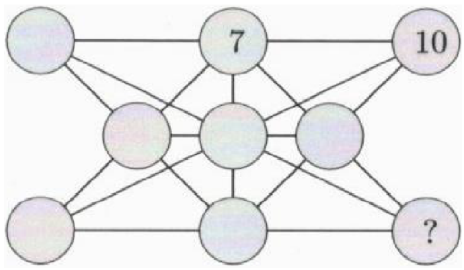
Am 11. Mai 2021 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Karl Czakler bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 14. Mai 2021 von 16:20-18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1.

Setze in jedes der neun Felder eine natürliche Zahl so ein, dass die Summe der Zahlen entlang einer Linie immer gleich groß ist. In zwei Feldern ist bereits eine Zahl eingetragen.



Wie heißt die Zahl im Feld mit dem Fragezeichen?

Aufgabe 2. Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck und S der Schnittpunkt der Diagonalen. Man zeige, dass die Dreiecke ABS und CDS ähnlich sind.

Aufgabe 3. Bestimme die kleinste positive ganze Zahl n, für die $10n$ eine Quadratzahl und $6n$ eine Kubikzahl ist.

Aufgabe 4. Man zeige: Sind in einem Dreieck zwei Höhen gleich lang, so ist das Dreieck gleichschenkelig.

Aufgabe 5. Seien a und b ganze Zahlen. Sei

$$a = a^2 + b^2 - 8b - 2ab + 16.$$

Beweise, dass a eine Quadratzahl ist.

Aufgabe 6.

Gegeben sei ein Rechteck$ABCD$ mit $AB = 8$ und $BC = 3$. Die Punkte M und N halbieren die Seiten AB und CD, Der Punkt P teilt die Strecke MC im Verhältnis $1 : 2$.
Bestimme die Fläche des Dreiecks ANP.

Aufgabe 7. Zeige: Der Winkel zwischen dem Durchmesser des Umkreises eines Dreiecks in einem Eckpunkt und der Höhe durch diesen Eckpunkt ist gleich der Differenz der beiden anderen Dreieckswinkel.

Aufgabe 8. Es sei ABC ein gleichschenkeliges Dreieck mit $\angle AC = 120°$. Die Basis BC wird in drei gleiche Teile geteilt: BD, DE und EC.
Beweise, dass das Dreieck ADE gleichseitig ist.

Aufgabe 9. Die Kreise k_1 mit Mittelpunkt M_1 und k_2 mit Mittelpunkt M_2 schneiden sich in zwei Punkten A und B. Die Gerade AM_1 schneidet den Kreis k_1 in den Punkten A und C, die Gerade AM_2 schneidet den Kreis k_2 in den Punkten A und D.
Man zeige, dass die Geraden CD und M_1M_2 parallel sind und dass B auf CD liegt.

Aufgabe 10. Auf einer Tafel stehen die Zahlen $1, 2, \ldots, 10$ Man führt folgende Operation aus: Man wählt zwei Zahlen aus, schreibt den Betrag ihrer Differenz auf die Tafel und löscht die beiden gewählten Zahlen.
Das wiederholt man solange, bis nur noch eine Zahl auf der Tafel steht.

(a) Man zeige, dass 1 als letzte Zahl auf der Tafel stehen kann.

(b) Man zeige, dass 2 nicht als letzte Zahl auf der Tafel stehen kann.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1: Rechnen oder Kombinieren

Aufgabe 2. Suche gleich große Winkel

Aufgabe 3: Primfaktorzerlegung!

Aufgabe 4: Überlege wofür man die Höhen eines Dreiecks verwenden kann.

Aufgabe 5: Betrachte die entsprechende quadratische Gleichung in der Variablen b.

Aufgabe 6: Die Angabe $1:2$ ist nicht relevant!

Aufgabe 7: Peripheriewinkelsatz!

Aufgabe 8: Winkeljagd

Aufgabe 9: Zeige zuerst, dass CD parallel zu M_1M_2 ist

Aufgabe 10: Überlege,was bei den Operationen unverändert bleibt!

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

10

Aufgabe 2.

Es gilt

$$\angle ASB = \angle CSD.$$

und mit dem Peripheriewinkelsatz

$$\angle ACD = \angle DBA.$$

Daher sind die Winkel der beiden Dreiecke gleich groß und die beiden Dreiecke ähnlich.

Aufgabe 3.

$10n$ ist eine Quadratzahl ist. Daher muss $n = 10k^2$ sein, wobei k eine möglichst kleine positive ganze Zahl ist.
Wir wissen weiters, dass $6n = 60k^2 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot k^2$ eine Kubikzahl ist. Daraus folgt $k^2 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^{2p}$, wobei wir das p so wählen müssen, dass einerseits p möglichst klein ist und andererseits $2+2p$ durch 3 teilbar ist. Daraus folgt $p = 2$ und $k^2 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^4 = 3600$. Die gesuchte Zahl n ist daher 36000.
($10n = 360000 = 600^2, 6n = 216000 = 60^3$.)

Aufgabe 4.

Sind zwei Höhen eines Dreiecks gleich lang, dann folgt sofort mit der Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks, dass auch die beiden entsprechenden Seiten gleich lang sind.

Aufgabe 5.

$$b^2 - b(2a+8) + a^2 - a + 16 = 0.$$

Die Diskriminante muss eine Quadratzahl sein.

$$(2a+8)^2 - 4(a^2 - a + 16) = m^2 \implies 36a = m^2$$

Aus $36a = m^2$ folgt, dass m^2 durch 2 und 3 teilbar ist. Daher ist m durch 6 teilbar, also $m = 6k$ und es folgt

$$36a = 36k^2 \implies a = k^2.$$

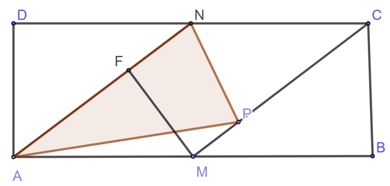
Andere Lösung:
Die gegebene Gleichung ist äquivalent zu

$$9a = (b - a - 4)^2$$

und daher ist a eine Quadratzahl.

Aufgabe 6.

Die Strecken AN und MC sind zueinander parallel. Daher genügt es den Abstand dieser beiden parallelen Strecken zu kennen um den Flächeninahalt des Dreiecks ANP zu berechnen. Die Lage von P auf MC ist dabei völlig unmaßgeblich.



Sei F der Fußpunkt des Lotes om M auf AD. Das Dreieck AMD ist ähnlich zum Dreieck NAD. Daher gilt

$$MF : AM = AD : AN \quad \text{also} \quad MF : 4 = 3 : 5.$$

Daraus berechnet man

$$MF = \frac{12}{5}$$

und für di Fläche des Dreiecks erhält man

$$[ANP] = \frac{AN \cdot MF}{2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{12}{5} = 6.$$

Andere Lösung: Das Dreieck ANP ist halb so groß wie das Parallelogramm $AMCN$.

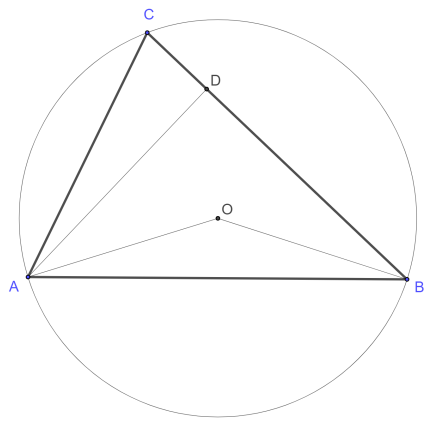
Aufgabe 7.

Wir bnezeichnen wie üblich die Winkel des Dreiecks ABC m it α, β und γ. Der Umkreismittelpunkt des Dreiecks sei O und D auf BC der Fußpunkt der Höhe durch A. Dann gilt

$$\angle DAC = 90° - \gamma$$

und mit dem Peripheriewinkelsatz

$$\angle AOB = 2\gamma \Longrightarrow \angle OAB = 90° - \gamma.$$



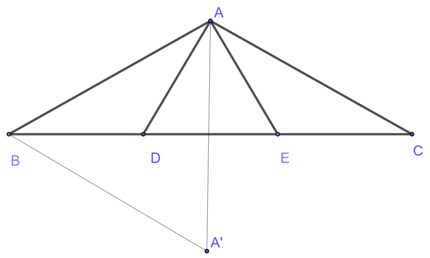
Für den Winkel zwischen dem Durchmesser des Umkreises und der Höhe im Eckpunkt A folgt

$$\angle DAO = |\alpha - 2(90° - \gamma)| = |\gamma - \beta].$$

Aufgabe 8.

Es sei $\alpha = \angle CBA = \angle ACB$ und $\beta = \angle BAD = \angle EAC$. Dann gilt

$\angle DAE = 120° - 2\beta$ und $\angle EDA = \angle AED = \alpha + \beta$.



Mit der Winkelsumme im Dreieck ADE folgt dann

$$120° - 2\beta + 2(\alpha + \beta) = 180° \Longrightarrow \alpha = 30°.$$

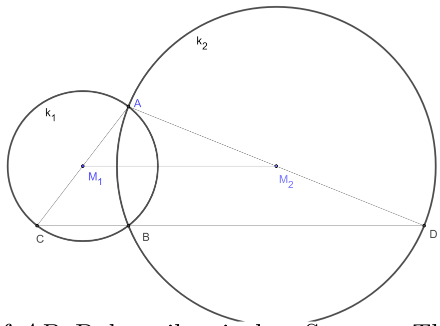
Sei nun A' der an BC gesoiegelte Punkt A. Das Dreieck BAA' ist dann gleichseitig und D ist der Schwerpunkt (=Inkreismittelpunkt) dieses Dreiecks. Daher gilt auch $\beta = 30°$ und alles ist gezeigt.

Aufgabe 9.

Wegen

$$AM_1 : M_1C = AM_2 : M_2D = 1 : 1$$

ist CD parallel zu M_1M_2.



Da M_1M_2 normal auf AB steht, ist auch CD normal auf AB. Daher gilt mit dem Satz von Thales, dass B auf CD liegt.

Aufgabe 10.

(a) Wir wählen folgende 5 Zahlenpaare aus:

$$(1, 2);\ (3, 4);\ \ldots;\ (9, 10).$$

Für jedes dieser Paare ist der Betrag ihrer Differenz 1, somit stehen 5 mal die Zahl 1 auf der Tafel. Im nächsten Schritt wählen wir die 2 Zahlenpaare $(1, 1)$ und bildet für jedes Paar die Differenz. Dann stehen 1 und 2 mal die Zahl 0 auf der Tafel. Da $1 - 0 = 1$ ist 1 als letzte Zahl möglich.
Bemerkung: Die Zahlenpaare sind relativ willkürlich gewählt, es sind zahlreiche Varianten möglich.

(b) Wir zeigen die allgemeinere Aussage, dass keine gerade Zahl als letzte Zahl möglich ist. Es gilt

$$a - b \equiv a + b \pmod 2,$$

somit bleibt die Parität der Summe der auf der Tafel stehenden Zahlen bei jeder Operation erhalten. Mit der Gaußschen Summenformel ist die Summe der zu Beginn auf der Tafel stehenden Zahlen

$$\frac{10 \cdot 11}{2} = 55$$

eine ungerade Zahl, also muss auch die letzte Zahl eine ungerade Zahl sein. Daher ist insbesondere 2 unmöglich.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.

siehe [3, 2007], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 4.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 5.

siehe [1], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 6.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 7.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 8.

siehe [2], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 9.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 10.

siehe [4, 2021], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Literatur

[1] Art of Problem Solving. https://artofproblemsolving.com/community. (aufgerufen am 17.05.2021).

[2] Aufgaben zur Mathematik Olympiade. https://www.olympiade-mathematik.de/. (aufgerufen am 17.05.2021).

[3] Gerhard Kirchner. Leitfaden für den JRW (Junior-Regionalwettbewerb). https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/90. (aufgerufen am 17.05.2021).

[4] Gerhard Kirchner. Leitfaden für den RWF (Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene). https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/89. (aufgerufen am 17.05.2021).