52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 21. Mai 2021

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Josef Pech zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 18. Mai 2021 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Josef Pech bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 21. Mai 2021 von 16:20-18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1. Löse das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a^2 + b &= c^2 \\ b^2 + c &= a^2 \\ c^2 + a &= b^2 \end{aligned}$$

in den reellen Zahlen.

Aufgabe 2. Eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ ganzer Zahlen ist gegeben durch $a_0 = 1$; $a_1 = 3$ und $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$. Zeige, dass

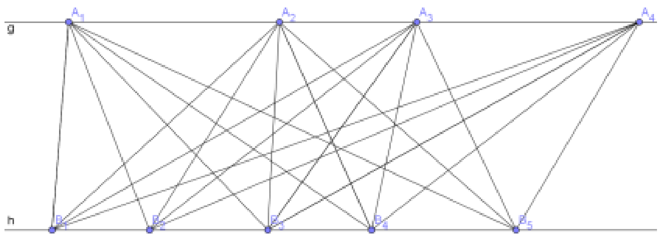
i) a_{2021} nicht durch 4 teilbar ist.

ii) a_{2021} keine Primzahl ist.

Aufgabe 3. Löse in den reellen Zahlen $\sqrt{x} = x^{2x-1}$

Aufgabe 4. Auf einer Geraden g sind 4 Punkte A_1; A_2; A_3; A_4 und auf einer dazu parallelen Geraden h sind 5 Punkte B_1; B_2; B_3; B_4; B_5 markiert.

Jeder Punkt der Geraden g ist mit jedem Punkt der Geraden h durch eine Strecke A_iB_k verbunden. Wie viele Schnittpunkte dieser Strecken gibt es, wenn keine drei Strecken durch einen Punkt gehen?



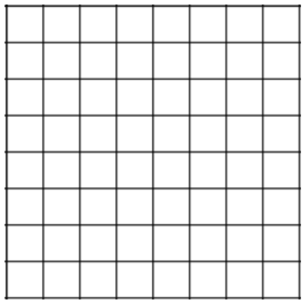
Aufgabe 5. Für welche positiven ganzen Zahlen n ist $\frac{2^n}{n^2}$ eine ganze Zahl?

Aufgabe 6. Lässt sich 2021 als Differenz von zwei Quadratzahlen darstellen?
Wenn ja: Auf wie viele Arten?

Aufgabe 7. Bestimme alle sechsstelligen, durch 72 teilbaren natürlichen Zahlen X mit folgender Eigenschaft:
Zerschneidet man X in drei zweistellige Zahlen a, b, c (von links nach rechts gelesenen), dann gilt

$$a : b : c = 1 : 2 : 3$$

Aufgabe 8. In einem 8x8-Quadrat sind alle Gitterlinien eingezeichnet.



Man sieht also 64 Quadrate (je mit Inhalt $1x1$) und viele weitere Quadrate bzw. Rechtecke. Wie groß ist die Summe der Inhalte aller dargestellten Quadrate?

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. 1.Schritt: alle drei Gleichungen addieren.

Aufgabe 2. Betrachte a_n modulo 4 und es zeigt sich eine Gesetzmäßigkeit.

Aufgabe 3. $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Welche Zahlen a, b erfüllen $a^b = 1$?

Aufgabe 4. Jeder Schnittpunkt ist durch die Angabe von wie vielen der Punkte A_i und durch die Angabe von wie vielen der Punkte B_j definiert?

Aufgabe 5. n^2 enthält nur Primfaktoren 2.

Aufgabe 6. $2021 = x^2 - y^2$. Wie weiter?

Aufgabe 7. $b = 2a$; $c = 3a$

Aufgabe 8. Will man z.B. die Viererquadrate (gemeint sind jene Quadrate, deren Seitenlänge $= 4$ ist) zählen, so kann man etwa den jeweiligen linken unteren Eckpunkt markieren und fragen, wie viele Positionen dieser zu markierende Eckpunkt einnehmen kann.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Addition aller drei Gleichungen und Subtraktion der Quadrate führt auf $a+b+c=0$ bzw. $a=-b-c$
Wähle $b:=u$; $c:=v$ ergibt $a=-u-v$.
Einsetzen in die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} u^2+2uv+v^2+u=v^2 \quad &\Rightarrow \quad u^2+2uv+u=0 \\ u^2+v=u^2+2uv+v^2 \quad &\Rightarrow \quad v^2+2uv-v=0 \end{aligned}$$

Subtraktion liefert u^2-v^2+u+v

$$u(u+2v+1)=0 \tag{1}$$
$$v(v+2u-1)=0 \tag{2}$$
$$u^2-v^2+u+v=0 \text{ bzw. } (u+v)(u-v+1)=0 \tag{3}$$

1.Fall: $u+v=0$
$u=-v$ einsetzen in (1) $v^2-2v^2-v=0$; $-v(v+1)=0$
ergibt $v_1=0$ mit $u_1=0$ und $v_2=-1$ mit $u_2=1$
Für (a,b,c) erhalten wir: $(0;0;0)$ und $(0;1;-1)$

1.Fall: $u-v+1=0$
$u=v-1 \quad \Rightarrow v^2-2v+1+2(v-1)v+v-1=0 \quad \Rightarrow 3v^2-3v=0 \quad \Rightarrow v(v-1)=0$
$v_1=0$ mit $u_1=-1$
ergibt für $(a,b,c)=(1;-1;0)$
$v_2=1$ mit $u_2=0$
ergibt für $(a,b,c)=(-1;0;1)$
Alle Elemente von $L=\{(0;0;0);(0;1;-1);(1;-1;0);(-1;0;1)\}$ erfüllen alle drei Gleichungen.

Aufgabe 2.

i) Betrachte die Folge modulo 4.
(a_n)modulo $4=(1;3;0;3;3;2;1;3;\ldots)$. Wir erkennen einen Sechser-Zyklus.
$2021 \equiv 5 \pmod 6$ und somit gilt $a_{2021} \equiv 2 \pmod 4$

ii) Damit erledigt sich auch (ii), da eine Zahl der Form $4k+2$ durch 2 teilbar ist ($a_{2021}>2$) und somit keine Primzahl ist.

Aufgabe 3.

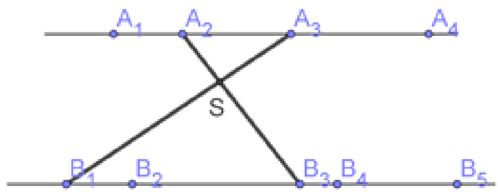
$$1 = x^{2x-1-\frac{1}{2}} = x^{2x-\frac{3}{2}} \qquad x \neq 0$$

$a^b = 1$ hat die Lösungen (i) $a = 1$, b bel; (ii) $a \neq 0$; $b = 0$ (iii) $a = -1$; b gerade $x = 1$ ist Lösung: $\sqrt{1} = 1^{2\cdot 1-1}$
$2x - \frac{3}{2} = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{3}{4}$
$x = -1$ ist nicht zulässig.

Aufgabe 4.

Um einen Schnittpunkt zu erhalten sind zwei Punkte aus A_i (ist auf $\binom{4}{2}$ Arten möglich) und zwei Punkte aus B_j (ist auf $\binom{5}{2}$ Arten möglich) zu wählen.

\# Schnittpunkte $= \binom{4}{2} \cdot \binom{5}{2} = 6 \cdot 10 = 60$



Aufgabe 5.

n^2 enthält nur Primfaktoren 2 und zwar in gerader Anzahl. $n = 2^k \quad \Rightarrow \quad n^2 = 2^{2k}$.
$\frac{2^{2^k}}{2^{2k}}$ ist eine ganze Zahl, wenn $2^k \geq 2k$.
das ist für $k = 0$ und für $k = 1$ richtig.
Weiters ist es richtig für alle $k \geq 2$, wie mit V.I. leicht gezeigt werden kann. Also ist die Behauptung richtig für $n = 2^k$.

Aufgabe 6.

$2021 = 43 \cdot 47$
$2021 = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ mit $a > b$
es gibt die Zerlegungen $2021 = 1.\ 2021 = 43 \cdot 47$
$a - b = 1$ und $a + b = 2021$ führt auf $(1011; 1010)$
$a - b = 43$ und $a + b = 47$ führt auf $(45; 2)$
Somit gilt: $2021 = 1011^2 - 1010^2 = 45^2 - 2^2$

Aufgabe 7.

$Z = abc = a \cdot 10^4 + b \cdot 10^2 + c$ (a, b, $c \ldots$ zweistellig) mit $72|Z \Rightarrow 8|Z$ und $9|Z \Rightarrow 9|a + b + c$ und $8|100b + c$
$a = 10x + y \quad b = 20x + 2y \quad c = 30x + 3y$
$Z = (10^5x + 10^4y) + 100(20x + 2y) + (30x + 3y) = 102030x + 10203y$
Modulo 8: $Z \equiv 2x + y \equiv 0 \pmod 8 \Rightarrow y = 8t - 2x$
Modulo 9: $Z \equiv 10203(10x + y) \equiv 0 \pmod 9 \quad |:3$
$x + y \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow x = 3l–y$

$y = 8t - 2x = 8t–2(3l - y) = 8t - 6l + 2y$
$y = 6l–8t \Rightarrow 2|y \Rightarrow y \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$
$c < 100 \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow$ einzige Lösung $Z = 244872$

Aufgabe 8.

a	A_i	#	A_{ges}
1	1^2	8^2	$1^2 \cdot 8^2$
2	2^2	7^2	$2^2 \cdot 7^2$
3	3^2	6^2	$3^2 \cdot 6^2$
4	4^2	5^2	$4^2 \cdot 5^2$
5	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
8	8^2	1^2	$8^2 \cdot 1^2$

In jedem dargestellten Quadrat denken wir uns den linken unteren Eckpunkt markiert. Wir untersuchen, welche Positionen dieser Eckpunkt einnehmen kann.

$S = 2 \cdot ((1 \cdot 8)^2 + (2 \cdot 7)^2 + (3 \cdot 6)^2 + (4 \cdot 5)^2) = 1968$

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

siehe [1, VI], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 2.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.

siehe [3, S.117], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 4.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 5.

siehe [4, 2008], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 6.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 7.

siehe [2, 2016/2017/20218], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 8.

Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Literatur

[1] Aufgaben zur Mathematik Olympiade. https://cmo.adygmath.ru/en/node/49. (aufgerufen am 26.05.2021).

[2] Gesammelte Bewerbsaufgaben (und Lösungen) der österreichischen Mathematikolympiade seit 2014. https://oemo.at/OeMO/aufgaben/. (aufgerufen am 26.05.2021).

[3] Tom Ballik. *Mathematik-Olympiade (für Anfänger)*. ikon VerlagsGesmbH, 2012.

[4] Stefan Wagner. Skriptum Kombinatorik. https://www.math.aau.at/OeMO/Downloads/datei/398. (aufgerufen am 26.05.2021).