52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 11. Juni 2021

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Karl Czakler zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 08. Juni 2021 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Karl Czakler bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 11. Juni 2021 von 16:20-18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1. In einem Rechteck $ABCD$ ist$M$ der Mittelpunkt der Seite AB und $\overline{AB} : \overline{AD} = 2 : 1$. Über der Strecke MD zeichne man ein gleichseitiges Dreieck MDX, derart, dass die Punkte X und A auf verschiedenen Seiten der Geraden MD liegen.
Bestimme den Winkel $\angle XCD$.

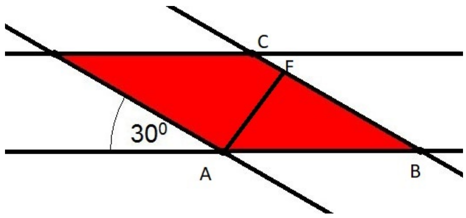
Aufgabe 2.
Es seien a und b reelle Zahlen mit $0 \leq a, b \leq 1$. Beweise:

$$\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} \leq 1.$$

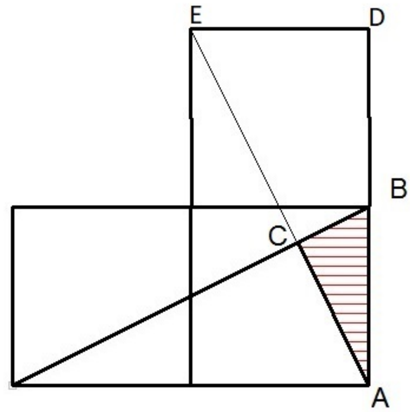
Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 3.

Zwei Streifen der Breite a (d.h. ihr Normalabstand hat die Länge a.) liegen, wie in der Figur unten dargestellt ist, in einem Winkel von 30^0 übereinander. Wie groß ist die Fläche die sie gemeinsam haben?



Aufgabe 4.



Drei Quadrate mit der Seitenlänge a sind wie in der Figur oben aneinandergefügt. Berechne den Flächeninhalt des eingezeichneten Dreiecks ABC.

Aufgabe 5.

Es seien a, b positive reelle Zahlen mit $a + b = 1$. Beweise:

$$2 < \left(a - \frac{1}{a}\right)\left(b - \frac{1}{b}\right) \leq \frac{9}{4}.$$

Wann gilt (bei der rechten Ungleichung) Gleichheit?

Aufgabe 6.

Gegeben sei ein Rechteck$ABCD$ mit $AB = 8$ und $BC = 3$. Die Punkte M und N halbieren die Seiten AB und CD, Der Punkt P teilt die Strecke MC im Verhältnis $1 : 2$.
Bestimme die Fläche des Dreiecks ANP.

Aufgabe 7. Es seien a, b und c ganze Zahlen, für die die Summe $a^3 + b^3 + c^3$ durch 18 teilbar ist. Man beweise, dass das Produkt abc durch 6 teilbar ist.

Aufgabe 8. Man beweise, dass es keine ganzen Zahlen x und y gibt, sodass $3x^2 + y^2 = 2021$ gilt.

Aufgabe 9. Die Kreise k_1 mit Mittelpunkt M_1 und k_2 mit Mittelpunkt M_2 schneiden sich in zwei Punkten A und B. Die Gerade AM_1 schneidet den Kreis k_1 in den Punkten A und C, die Gerade AM_2 schneidet den Kreis k_2 in den Punkten A und D.
Man zeige, dass die Geraden CD und M_1M_2 parallel sind und dass B auf CD liegt.

Aufgabe 10. Auf einer Tafel stehen die Zahlen $1, 2, \ldots, 10$ Man führt folgende Operation aus: Man wählt zwei Zahlen aus, schreibt den Betrag ihrer Differenz auf die Tafel und löscht die beiden gewählten Zahlen.
Das wiederholt man solange, bis nur noch eine Zahl auf der Tafel steht.

(a) Man zeige, dass 1 als letzte Zahl auf der Tafel stehen kann.

(b) Man zeige, dass 2 nicht als letzte Zahl auf der Tafel stehen kann.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1: Winkeljagd

Aufgabe 2. Suche gleich große Winkel auf gemeinsamen Nenner bringen

Aufgabe 3: Beachte die eingezeichnete Normale durch A auf die gegenüberliegende Seite

Aufgabe 4: Suche ähnliche Dreiecke

Aufgabe 5: auf gemeinsamen Nenner bringen

Aufgabe 6: Die Angabe $1:2$ ist nicht relevant!

Aufgabe 7: $6 = 2 \cdot 3$.Kongruenzen

Aufgabe 8: Kongruenzen

Aufgabe 9: Zeige zuerst, dass CD parallel zu M_1M_2 ist

Aufgabe 10: Überlege,was bei den Operationen unverändert bleibt!

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Das Dreieck XMC ist gleichschenkelig und es gilt

$$\angle XMC = 180^\circ - 60^\circ - 2 \cdot 45^\circ = 30^\circ.$$

Daher gilt

$$\angle MXC = \angle XCM = 75^\circ$$

und es folgt

$$\angle XCD = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ.$$

Aufgabe 2.

Wir können die Ungleichung mit dem gemeinsamen Nenner $(a+1)(b+1) > 0$ multiplizieren. Wir erhalten die äquivalente Ungleichung

$$a^2 + b^2 \leq ab + 1.$$

Da für jede reelle Zahl t mit $0 \leq t \leq 1$ die Ungleichung $t^2 \leq t$ gilt, genügt es

$$a + b \leq ab + 1$$

zu zeigen. Das ist aber zu

$$0 \leq (1-a)(1-b)$$

äquivalent und wegen $0 \leq a, b \leq 1$ richtig. Gleichheit gilt für die Zahlenpaare $(1,1), (1,0)$ und $(0,1)$.

Aufgabe 3.

Der Fußpunkt des Lotes von A auf BC sei F. Dann gilt $\angle BAF = 60^0$, das Dreieck ABF also ein "halbes gleichseitiges Dreieck" und daraus folgt $AB = 2a$. Der Flächeninhalt der gesuchten Figur ist daher gleich dem eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und $2a$, also gleich $2a^2$.

Aufgabe 4.

Die Dreiecke ACB und ADE sind ähnlich. Es gilt $AE = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{5}a$. Daher gilt für die Flächeninhalte A_1 und A_2 dieser Dreiecke

$$A_1 : A_2 = a^2 : 5a^2$$

und mit $A_2 = a^2$ folgt

$$A_1 = \frac{a^2}{5}.$$

Aufgabe 5.

Die linke Ungleichung ist äquivalent zu

$$2ab < a^2b^2 - (a^2 + b^2) + 1.$$

Da $a^2 + b^2 = 1 - 2ab$ ist, folgt

$$2ab < a^2b^2 - 1 + 2ab + 1,$$

also

$$0 < a^2b^2$$

und das ist klarerweise richtig.
Die rechte Ungleichung ist nach dem Ausmultiplizieren äquivalent zu

$$4a^2b^2 - 4(a^2 + b^2) + 4 \leq 9ab.$$

Setzt man wieder $a^2 + b^2 = 1 - 2ab$ ein, so erhält man

$$4a^2b^2 - ab \leq 0,$$

also

$$ab(4ab - 1) \leq 0.$$

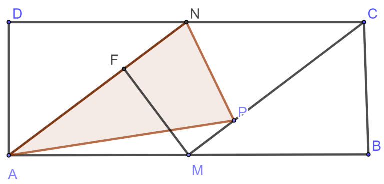
Da mit der arithmetisch-geometrischen Ungleichung

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

gilt, ist die Ungleichung bewiesen.

Aufgabe 6.

Die Strecken AN und MC sind zueinander parallel. Daher genügt es den Abstand dieser beiden parallelen Strecken zu kennen um den Flächeninahalt des Dreiecks ANP zu berechnen. Die Lage von P auf MC ist dabei völlig unmaßgeblich.



Die Strecken AN und MC sind zueinander parallel. Daher genügt es den Abstand dieser beiden parallelen Strecken zu kennen um den Flächeninahalt des Dreiecks ANP zu berechnen. Die Lage von P auf MC ist dabei völlig unmaßgeblich. Sei F der Fußpunkt des Lotes om M auf AD. Das Dreieck AMD ist ähnlich zum Dreieck NAD, Daher gilt

$$MF : AM = AD : AN \quad \text{also} \quad MF : 4 = 3 : 5.$$

Daraus berechnet man

$$MF = \frac{12}{5}$$

und für di Fläche des Dreiecks erhält man

$$[ANP] = \frac{AN \cdot MF}{2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{12}{5} = 6.$$

Andere Lösung: Das Dreieck ANP ist halb so groß wie das Parallelogramm $AMCN$.

Aufgabe 7.

Da $6 = 2 \cdot 3$ ist, zeigen wir, dass mindestens eine der Zahlen durch 2 und mindestens eine durch 3 teilbar ist.

- Teilbarkeit durch 9:

  Eine Kubikzahl ist kongruent $0, 1$ oder -1 modulo 9. Wenn daher $a^3+b^3+c^3$ durch 18 teilbar sein soll, muss eine der Kubikzahlen kongruent 0 modulo 9 sein. Dann ist aber die Zahl selbst durch 3 teilbar.

- Teilbarkeit durch 2: Sind alle drei Zahlen ungerade, dann sind auch ihre dritten Potenzen ungerade und $a^3+b^2+c^3$ eine ungerade Zahl und nicht durch 2 teilbar. Daher muss mindestens eine dieser Zahlen gerade sein.

folgt

Aufgabe 8.

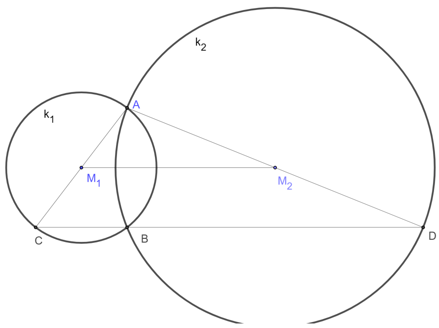
Betrachte die Gleichung modulo 3. Es gilt $2021 \equiv 2 \mod 3$ und $3x^2 + y^2 \equiv y^2 \mod 3$. Da 2 ein quadratischer Nichtrest mod 3 ist, gibt es daher keine Lösung.

Aufgabe 9.

Wegen

$$AM_1 : M_1C = AM_2 : M_2D = 1 : 1$$

ist CD parallel zu M_1M_2. Da M_1M_2 normal auf AB steht, ist auch CD normal auf AB. Daher gilt mit dem Satz von Thales, dass B auf CD liegt.



Aufgabe 10.

(a) Wir wählen folgende 5 Zahlenpaare aus:

$$(1, 2);\ (3, 4);\ \ldots;\ (9, 10).$$

Für jedes dieser Paare ist der Betrag ihrer Differenz 1, somit stehen 5 mal die Zahl 1 auf der Tafel. Im nächsten Schritt wählen wir die 2 Zahlenpaare $(1, 1)$ und bildet für jedes Paar die Differenz. Dann stehen 1 und 2 mal die Zahl 0 auf der Tafel. Da $1 - 0 = 1$ ist 1 als letzte Zahl möglich.
Bemerkung: Die Zahlenpaare sind relativ willkürlich gewählt, es sind zahlreiche Varianten möglich.

(b) Wir zeigen die allgemeinere Aussage, dass keine gerade Zahl als letzte Zahl möglich ist. Es gilt

$$a - b \equiv a + b \pmod 2,$$

somit bleibt die Parität der Summe der auf der Tafel stehenden Zahlen bei jeder Operation erhalten. Mit der Gaußschen Summenformel ist die Summe der zu Beginn auf der Tafel stehenden Zahlen

$$\frac{10 \cdot 11}{2} = 55$$

eine ungerade Zahl, also muss auch die letzte Zahl eine ungerade Zahl sein. Daher ist insbesondere 2 unmöglich.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.

siehe [1, 2013], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 3.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 5.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 6.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 7.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 8.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 9.

Von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 10.

siehe [2, 2021], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Literatur

[1] Gerhard Kirchner. Leitfaden für den JRW (Junior-Regionalwettbewerb). `https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/90`. (aufgerufen am 14.06.2021).

[2] Gerhard Kirchner. Leitfaden für den RWF (Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene). `https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/89`. (aufgerufen am 14.06.2021).