52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 18. Juni 2021

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Josef Pech zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 15. Juni 2021 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Josef Pech bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 18. Juni 2021 von 16:20-18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1.

a) Man zeige: Das Produkt von 5 aufeinander folgenden geraden natürlichen Zahlen ist stets durch 15 teilbar.

b) Man bestimme die größte ganze Zahl D, so dass das Produkt von 5 aufeinander folgenden geraden natürlichen Zahlen stets durch D teilbar ist.

Aufgabe 2. Beweise folgenden Satz:
Wenn p eine Primzahl größer als 3 ist, dann ist $p^2 - 1$ durch 24 teilbar.

Aufgabe 3. Welche Zahlen p können gewählt werden, so dass die Ungleichung $x^2 - pxy + y^2 \geq 0$ für alle reellen Zahlen gilt?

Aufgabe 4. Sind a, b, c Seitenlängen eines Dreiecks, so kann man aus den drei Größen $\sqrt{a}$; $\sqrt{b}$; $\sqrt{c}$ ein Dreieck konstruieren.

Aufgabe 5. Gegeben ist die Gleichung $3^x = 4y + 5$.

a) Für welche ganzzahligen Lösungen $(x; y)$ ist x eine Primzahl?

b) Löse die Gleichung in den ganzen Zahlen.

Aufgabe 6.

a) Löse das System

$$\begin{cases} a + b + c = 19 \\ a^2 + b^2 - c^2 = 137 \\ z \cdot c = 2019 \end{cases}$$

in den positiven ganzen Zahlen.

b) Auf wie viele Arten kann man 19 als Summe von drei ganzen Zahlen a, b, c (alle ≥ 1) darstellen?

Aufgabe 7. Auf der Seite c des Dreiecks ABC liegt der Punkt P (P soll zwischen den Punkten A und B liegen). Konstruiere eine Gerade durch P, die die Fläche des Dreiecks halbiert.

Aufgabe 8. In einem rechtwinkeligen Dreieck mit ganzzahligen Seitenlängen a, b, c ist der Inkreisradius ρ ganzzahlig. Zeige dies.

Aufgabe 9.
Bildet man aus einer dreistelligen Zahl eine sechsstellige, indem man die dreistellige zweimal hintereinander anschreibt, so ist die erhaltene sechsstellige durch 7 teilbar. Durch welche Primzahlen ist sie noch teilbar?

Aufgabe 10. Löse in den ganzen Zahlen die Gleichung $9a^2 - 2021 = 4b^2$.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1.

a) 5 aufeinanderfolgende Zahlen liegen paarweise in verschiedenen Restklassen (mod 5).

b) Die mittlere kann man mit $2n$ bezeichnen. Dann so viele Faktoren 2 herausheben, wie möglich.

Aufgabe 2. Von 2 aufeinanderfolgenden geraden Zahlen ist eine durch 4 teilbar.

Aufgabe 3. Betrachte die linke Seite als Gleichung in x.

Aufgabe 4. Angenommen die drei Zahlen $\sqrt{a}$; $\sqrt{b}$; $\sqrt{c}$ lassen es nicht zu (ähnlich wie 8; 3; 2), ein Dreieck zu konstruieren. Also ist in einem Fall die Dreiecksungleichung nicht erfüllt.

Aufgabe 5. Betrachte die Gleichung modulo 4.

Aufgabe 6. Für z gibt es nur wenige Möglichkeiten, die man schnell untersuchen kann.

Aufgabe 7. Zwei Dreiecke sind flächengleich, wenn sie

– bei übereinstimmender Basisseite $c = AB$

– dieselbe Höhe h_c haben.

Aufgabe 8. Bei ganzzahligen u, v mit $u > v$ sind $a = u^2 - v^2$; $b = 2uv$; $c = u^2 + v^2$ die Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks. Für jedes rechtwinkelige Dreieck mit ganzzahligen Seitenlängen gibt es solche ganzen Zahlen u, v.

Aufgabe 9.

Aufgabe 10. $9a^2 - 4b^2$ lässt sich faktorisieren.