AUFGABENSAMMLUNG JUNIOR*INNEN WS 2020/21

Diese Sammlung ist eine Auswahl an Aufgaben, die während des Wintersemester 2020/21 mit Olympionik*innen der Universität Wien als Online-Kurse zur Vorbereitung auf den Junior–Regionalwettbewerb der 52. Österreichischen Mathematik-Olympiade bearbeitet wurden.

Alle Aufgaben sind hierbei in vier Teile aufgeteilt: Angabe, Hinweise, Lösung und Quellenangabe.

Fragen und Feedback per E-Mail sind jederzeit willkommen.

Inhaltsverzeichnis

Datum: 2. Januar 2024.

1. Algebra

Gleichungen.

Aufgabe 1.1. Löse in den reellen Zahlen

$$|x-4| = 3 \cdot |x-2|$$

Aufgabe 1.2. Löse in den reellen Zahlen:

$$|10-7x| = 3 \cdot |3x-2|.$$

Aufgabe 1.3. Löse in den reellen Zahlen:

$$4 \cdot \lfloor x \rfloor - 3x - 2 = 0.$$

Hinweis: Unter $\lfloor x \rfloor$ (sprich: „Gaußklammer von x“) verstehen wir die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

Aufgabe 1.4. Löse in den reellen Zahlen:

$$\lfloor x \rfloor = \frac{5}{4}x - 2$$

Hinweis: Unter $\lfloor x \rfloor$ (sprich: „Gaußklammer von x“) verstehen wir die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

Aufgabe 1.5. Löse in den reellen Zahlen

a) $\sqrt{x+5} - \sqrt{x} = 1$
b) $x - 4 = \sqrt{3x-8}$

Aufgabe 1.6. Löse in den reellen Zahlen

$$(x-4) \cdot (x^2 - 8x + 14)^2 = (x-4)^3.$$

Aufgabe 1.7. Sei a eine reelle Zahl. Bestimme die reellen Lösungen der Gleichung

$$x^3 + a^3 = x^2 - ax + a^2$$

in Abhängigkeit von a.

Aufgabe 1.8. Löse das Gleichungssystem

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

in den rationalen Zahlen.

Aufgabe 1.9. Löse
$$x^{28} = x^{3x+1}$$
in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 1.10. Löse in den ganzen Zahlen
$$(x^2 - y^2)^{3-x-y} = 4.$$

Ungleichungen.

Aufgabe 1.11. Zeige, dass für alle positiven Zahlen a die Ungleichung
$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$
gilt.

Für welche Zahlen a gilt Gleichheit?

Aufgabe 1.12. Für die positiven reellen Zahlen x und y gilt die Bedingung $xy = 4$.

Man beweise, dass die Ungleichung
$$\frac{1}{x+3} + \frac{1}{y+3} \leq \frac{2}{5}$$
gilt und gebe an, wann Gleichheit eintritt.

Aufgabe 1.13. Es seien a, b, c, d reelle Zahlen.

Beweise, dass von den Zahlen $a - b^2, b - c^2, c - d^2$ und $d - a^2$ nicht alle größer als $\frac{1}{4}$ sein können.

Aufgabe 1.14. Beweise die Mittelungleichungen für zwei Variable: Es seien x_1, x_2 positive reelle Zahlen. Es gilt:
$$\max(x_1, x_2) \geq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} \geq \frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2} \geq \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} \geq \min(x_1, x_2)$$
$$QM \geq AM \geq GM \geq HM$$
Quadratisches Mittel $\geq$ Arithmetisches Mittel $\geq$ Geometrisches Mittel $\geq$ Harmonisches Mittel

Gleichheit für $x_1 = x_2$.

Aufgabe 1.15. Beweise folgende Basisungleichungen:

$$
\begin{aligned}
a+1 &\geq 2\sqrt{a} \qquad a \in \mathbb{R}^+, \qquad \textit{Gleichheit für } a=1 && (1)\\
\frac{a}{b}+\frac{b}{a} &\geq 2 \qquad a,b \in \mathbb{R}^+, \qquad \textit{Gleichheit für } a=b && (2)\\
x+\frac{1}{x} &\geq 2 \qquad x \in \mathbb{R}^+, \qquad \textit{Gleichheit für } x=1 && (3)\\
(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) &\geq 4 \qquad a,b \in \mathbb{R}^+, \qquad \textit{Gleichheit für } a=b && (4)\\
(a+b)(b+c)(c+a) &\geq 8abc \qquad a,b,c \in \mathbb{R}^+, \qquad \textit{Gleichheit für } a=b=c && (5)\\
a^2+b^2+c^2 &\geq ab+bc+ca \qquad a,b,c \in \mathbb{R}, \qquad \textit{Gleichheit für } a=b=c && (6)\\
(a+b+c)^2 &\geq 3(ab+bc+ca) \qquad a,b,c \in \mathbb{R}, \qquad \textit{Gleichheit für } a=b=c && (7)\\
3(a^2+b^2+c^2) &\geq (a+b+c)^2 \qquad a,b,c \in \mathbb{R}, \qquad \textit{Gleichheit für } a=b=c && (8)\\
\sqrt{(a+c)(b+d)} &\geq \sqrt{ab}+\sqrt{cd} \qquad a,b,c,d \in \mathbb{R}^+, \qquad \textit{Gleichheit für } bc=ad && (9)\\
\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2} &\geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \qquad a,b \in \mathbb{R}^+, \qquad \textit{Gleichheit für } a=b && (10)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 1.16. Es seien a, b und c positive reelle Zahlen. Beweise:

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right) \geq 8$$

Aufgabe 1.17. Es seien a, b und c positive reelle Zahlen. Man beweise:

$$\frac{a}{c}+\frac{c}{b} \geq \frac{4a}{a+b}.$$

Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 1.18. Man zeige für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$ mit $x^2+y^2=1$, dass folgende Ungleichung gilt:

$$x^3+y^2 \geq \sqrt{xy}.$$

Aufgabe 1.19. Zeige, dass für alle $x \geq 0$ die Ungleichung

$$2x+1 \geq 2\sqrt{x \cdot (1+x)}$$

gilt.

Aufgabe 1.20.

Es seien x und y positive reelle Zahlen mit $x+y=1$.

Man beweise:

$$\frac{(3x-1)^2}{x}+\frac{(3y-1)^2}{y} \geq 1$$

Aufgabe 1.21. Es seien x, y positive reelle Zahlen mit $x + y + xy = 3$.

Man beweise, dass $x + y \geq 2$.

Aufgabe 1.22. Zeige, dass für alle reellen Zahlen x, y die Ungleichung $4x^2 + y^2 + 5 \geq 4(x + y)$ gilt. Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 1.23. Bestimme alle reellen Zahlen x mit

$$|x^2 - 4x + 1| > |x^2 - 4x + 5|$$

Aufgabe 1.24. Es seien a und b positive reelle Zahlen. Beweise;:

$$\frac{a}{a+1} + \frac{2b}{b+2} \leq \frac{3(a+b)}{a+b+3}.$$

Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 1.25. Man beweise, dass für alle nicht negativen reellen Zahlen a, b, c gilt:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{ab}.$$

Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 1.26. Es seien a und b reelle Zahlen mit $0 \leq a, b \leq 1$. Man beweise:

$$\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} \leq 1.$$

Wann gilt Gleichheit?

Quadratische Gleichung, Polynome und Funktionen.

Aufgabe 1.27. Für welche Zahlen k hat die Gleichung

$$x^2 + (2k + 1)x + 4 = 0$$

genau eine Lösung?

Aufgabe 1.28. Für welche nicht-negativen ganzen Zahlen C hat die Gleichung $2x^2 + 4x + C = 0$ mindestens eine reelle Lösung?

Aufgabe 1.29. Sei a eine reelle Zahl.

Für welche Werte von a hat die Gleichung $x^2 - 4ax + a - 3 = 0$ zwei reelle Lösungen, deren Summe das Doppelte ihres Produkts ist?

Aufgabe 1.30. Löse in den reellen Zahlen

$$x^2 - 4xy + 5y^2 - 2y + 1 = 0.$$

Aufgabe 1.31. Man bestimme alle Paare $(x,\ y)$ reeller Zahlen, für die gilt:

$$xy^2 - xy - x^2y + x^2 = 0.$$

Aufgabe 1.32. Löse in den ganzen Zahlen:

$$x^2 - 4x + y^2 - 2y = 0.$$

Aufgabe 1.33. Löse in den ganzen Zahlen:

$$x^2 - y^2 - 6x - 2y + 5 = 0.$$

Aufgabe 1.34. Sei $P(x) = (1+x+x^2)^{11} \cdot (2-x-x^2)^{10}$. Denkt man sich den Ausdruck ausmultipliziert, so erhält man ein Polynom $A_n x^n + \ldots + a_1 x + A_0$.

a) Welchen Grad hat das Polynom?
b) Bestimme A_0.

Aufgabe 1.35. $F(x) = (1 - x + x^2)^{10} \cdot (1 + x - x^2)^{10}$
Bestimme

a) den Grad von $f(x)$
b) A_0
c) A_1
d) die Summe aller Koeffizienten.

Aufgabe 1.36.
Von der Gleichung $x^3 - A_2 x^2 - 5x + A_0 = 0$ kennt man die Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$. Bestimme die 3. Lösung.

Aufgabe 1.37. Zeige: Wenn die ganze Zahl α Lösung der Gleichung $A_n x^n + \ldots + A_1 x + A_0 = 0$ ist (wobei alle Koeffizienten $A_n, \ldots, A_1, A_0$ ganzzahlig sind), dann ist α Teiler des konstanten Gliedes A_0.

Aufgabe 1.38. Für $p(x) = 2x^2 + 3x + C$ gilt: Das Produkt der beiden Nullstellen ist -1. Bestimme C sowie die beiden Nullstellen.

Aufgabe 1.39.
Die Gleichung $x^3 + Ax^2 - 5x + 6 = 0$ hat die Lösung $x_1 = 1$.Bestimme die restlichen Lösungen.

Aufgabe 1.40. Für welche reellen Zahlen x hat der Ausdruck

$$f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4|$$

den kleinstmöglichen Wert?

Folgen und Reihen.

Aufgabe 1.41. Gegeben ist die Folge

$$a_n = \langle 3;\ 7;\ 11;\ \ldots\ 4n-1;\ \ldots \rangle.$$

Zeige, dass diese Folge unendliche viele Primzahlen enthält.

Aufgabe 1.42. Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ganzer Zahlen ist gegeben durch $a_1 = a_2 = 1$ und

$$a_{n+2} = a_n \cdot a_{n+1} + 3.$$

Zeige, dass a_{2022} durch 5 teilbar ist.

Bestimme auch die Einerstelle von a_{2022}.

Aufgabe 1.43. Man bestimme

$$S = 2021^2 - 2020^2 + 2019^2 - 2018^2 \pm \ldots + 1^2 - 0^2.$$

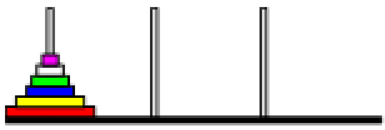
Aufgabe 1.44. Schreibt man die Zahlen von 1 bis 1000000 an und bildet man die Summe aller Ziffernsummen der angeschriebenen Zahlen, so erhält man welchen Wert?

2. Kombinatorik

Denksport und Abzählen.

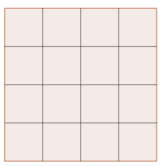
Aufgabe 2.1. Alle n Scheiben sollen von einem Stab auf einen der beiden anderen verfrachtet werden, wobei zu beachten ist:

Bei jedem Schritt darf nur genau eine Scheibe transportiert werden. Dabei darf nie eine größere Scheibe auf einer kleineren zu liegen kommen.



Bestimme die Minimalanzahl a_n von Schritten.

Aufgabe 2.2. In einem 4×4 Quadrat sind 16 kleine 1×1-Quadrate eingezeichnet.



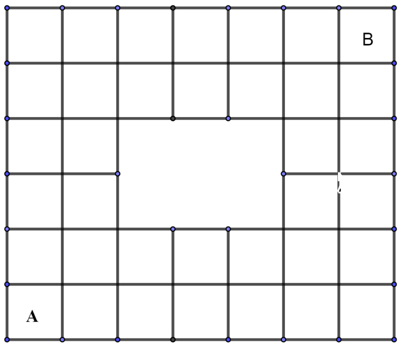
a) Wie viele Quadrate sind zu sehen?
b) Wie viele Quadrate sind in einem 8×8-Raster zu sehen?

Aufgabe 2.3. Auf wie viele Arten kann man $n = 21$ als Summe von drei positiven ganzen Zahlen a, b, c mit $a \geq b \geq c > 0$ darstellen? Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn $n = 2021$ ist?

Aufgabe 2.4.

Zu jeder Ecke eines Würfels wird mit roter Farbe eine der Zahlen $1, 2, \ldots, 8$ geschrieben. Zu jeder Kante wird mit grüner Farbe die Summe der beiden Zahlen geschrieben, die bei den Endpunkten dieser Kante stehen.
Ist es möglich die roten Zahlen so anzuordnen, dass zwei grüne Zahlen gleich sind?

Aufgabe 2.5. Wie viele verschiedene Wege gibt es von A nach B, wenn man von einem Feld aus immer nur auf das angrenzende Feld rechts oder auf das angrenzende Feld darüber gehen kann.

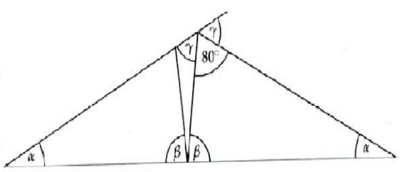


3. Geometrie

Winkeljagd.

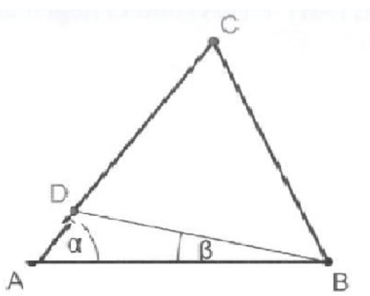
Aufgabe 3.1.

Bestimme die Winkel α, β und γ.



Aufgabe 3.2.

Im dargestellten Dreieck ABC mit dem Punkt D auf AC gilt $AB = AC$ und $BC = BD$. Der Winkel $\angle ABD = \beta$ beträgt $12°$.



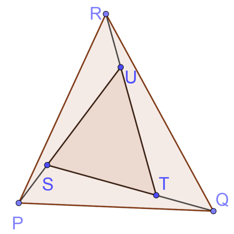
Wie groß ist der Winkel α?

Aufgabe 3.3. In einem Dreieck ist ein Winkel um 27° größer als das arithmetische Mittel der beiden anderen und ein Winkel doppelt so groß wie ein anderer.
Berechne, welche Werte für die Winkel des Dreiecks möglich sind.

Flächeninhalte und Kongruenz.

Aufgabe 3.4.

In nebenstehender Skizze gilt: $TQ = \frac{1}{2}TS$; $UR = \frac{1}{3}UT$; $SP = \frac{1}{4}SU$. Der Inhalt des Dreiecks STU beträgt 1.
Berechne den Inhalt des Dreiecks PQR.

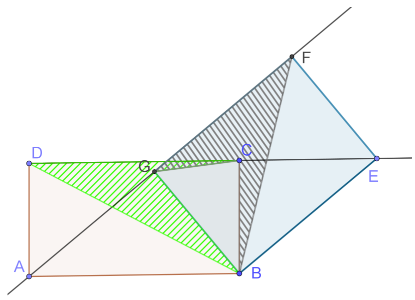


Aufgabe 3.5. Gegeben ist ein konvexes Viereck $ABCD$ und ein Punkt N in seinem Inneren derart, dass $|AN| = |DN| = 8$, $|BN| = |CN| = 6$ und $|\angle DNB| = |\angle ANC| = 120°$ gilt.

a) Berechne den Flächeninhalt des Vierecks ABCD für $|\angle ANB| = 30°$
b) Zeige, dass der Flächeninhalt des Vierecks ABCD maximal ist, wenn $|\angle ANB| = 30°$ ist.

Aufgabe 3.6.

$ABCD$ und $BEFG$ seien Rechtecke so, dass E auf der Geraden DC und A auf der Geraden FG liegt (Skizze). Zeige, dass die nichtkonvexen Vierecke $BFGC$ und $CDBG$ flächengleich sind.



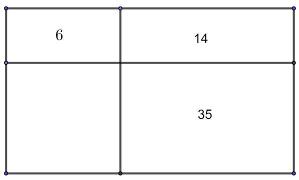
Aufgabe 3.7. Gegeben ist ein Parallelogramm $ABCD$. Über den Strecken AB und AD werden gleichseitige Dreiecke ABF und ADE gezeichnet.
Zeige, dass das Dreieck FCE gleichseitig ist.

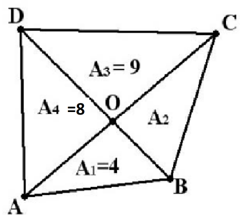
Aufgabe 3.8. $ABCD$ sei ein Rechteck. $AEFG$ ist ein Rechteck derart, dass E und G auf der Geraden durch B und D liegen.
Zeige, dass $GBCF$ ein Trapez ist.

Aufgabe 3.9. Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $s = 30$. Der Mittelpunkt der Seite AB sei E und der Mittelpunkt der Seite AD sei F. Der Schnittpunkt der Diagonalen AC mit DE sei P und der Schnittpunkt von DE mit CF sei Q.
Berechne den Flächeninhalt des Vierecks $APQF$.

Aufgabe 3.10. Durch einen Punkt A im Inneren eines Winkels geht eine Gerade, die mit den Schenkeln des Winkels ein Dreieck kleinster Fläche bildet. Zeige, dass der Abschnitt dieser Geraden, welcher zwischen den Schenkeln liegt, durch den Punkt A halbiert wird.

Aufgabe 3.11. Ein Rechteck $ABCD$ wird durch zwei Strecken parallel zu den Seiten in vier kleinere Rechtecke zerlegt. Die Flächeninhalte von drei Rechtecken ist angegeben. Wie groß ist der Flächeninhalt des vierten Rechtecks?
Allgemein:
Die Diagonalen eines konvexen Vierecks $ABCD$ schneiden sich in O. Es sei $A_1 = [AOB] = 4$, $A_3 = [COD] = 9$ und $A_4 = [AOD] = 8$. Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks $A_2 = [BOC]$.
Anmerkung: Mit $[ABC]$ ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC gemeint.





Strahlensatz.

Aufgabe 3.12. $ABCD$ sei ein konvexes Viereck. Die Parallele zu BC durch A wird von BD in F geschnitten. Die Parallele zu AD durch B wird von AC in E geschnitten.
Zeige, dass EF parallel zu CD ist.

Pythagoras und Thales.

Aufgabe 3.13. Das Dreieck ABC mit der Basis AB ist gleichschenkelig und der Winkel $\gamma = \angle ACB$ beträgt 45°. Der Umkreismittelpunkt von ABC sei U. Der Umkreis des Dreiecks ABU schneidet die beiden Schenkel AC und BC in den Punkten D und E.
Beweise, dass der Winkel $\angle BAC$ durch AU und AE gedrittelt wird.

Aufgabe 3.14.
Ermittle alle natürlichen Zahlen n, für die gilt: Es gibt ein gleichschenkeliges Dreieck ABC mit der Basislänge $|AB| = \sqrt{57}$ und der Schenkellänge $\sqrt{n}$, in dem die Mittelsenkrechten der Schenkel die Basis in drei gleich lange Teilstrecken zerlegen.

Peripheriewinkelsatz.

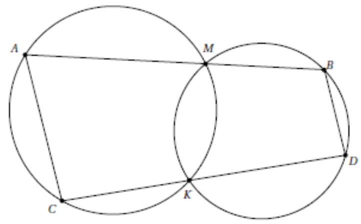
Aufgabe 3.15. Spiegelt man den Höhenschnittpunkt eines Dreiecks an den Seiten, so liegen die gespiegelten Punkte auf dem Umkreis.

Aufgabe 3.16. Außerhalb des Quadrates $ABCD$ konstruieren wir über der Seite CD ein rechtwinkeliges Dreieck DCM mit dem rechten Winkel in M.
Zeige, dass die Winkelsymmetrale in M das Quadrat in zwei kongruente Teile teilt.

Aufgabe 3.17. In einem spitzwinkligen Dreieck ABC sei O der Umkreismittelpunkt und AH eine Höhe. Zeige, dass die Winkel $\angle BAH$ und $\angle CAO$ gleich groß sind.

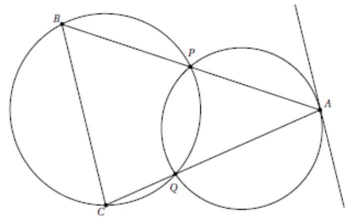
Aufgabe 3.18. Zwei Kreise schneiden sich in den Punkten M und K.

Die Geraden AB und CD gehen durch M beziehungsweise K und schneiden den einen Kreis in den Punkten A und C, den anderen in B und D. Zeige, dass AC parallel zu BD ist.



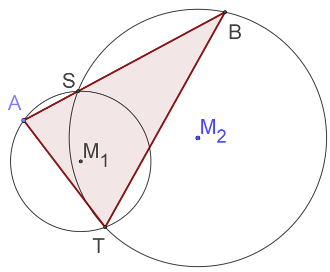
Aufgabe 3.19. Zwei Kreise schneiden sich in den Punkten P und Q.

Durch einen Punkt A auf dem ersten Kreis werden die Geraden AP und AQ gezeichnet. Sie schneiden den zweiten Kreis in den Punkten B und C. Zeige, dass die Tangente an den ersten Kreis im Punkt A parallel zu der Geraden BC ist.



Aufgabe 3.20. Seien S und T die beiden Schnittpunkte der Kreise k_1 und k_2.

Der Punkt A liegt auf k_1, und B so auf k_2, dass A, S und B auf einer Geraden liegen (dabei liegen A bzw. B auf verschiedenen Seiten der Geraden durch S und T.)



Zeige, dass alle möglichen Dreiecke ABT zueinander ähnlich sind.

Aufgabe 3.21. Gegeben ist ein Trapez $ABCD$ mit AB parallel zu CD und $BC = CD = DA$. Beweise, dass die Diagonalen in den Punkten A und B Winkelhalbierende sind!

Aufgabe 3.22. Es sei $ABCDE$ ein konvexes Fünfeck mit fünf gleich langen Seiten und rechten Winkeln in den Eckpunkten C und D. Weiters sei P der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD. Man beweise, dass die Strecken PA und PD gleich lang sind.

Geometrische (Un-)gleichungen.

Aufgabe 3.23. Seien a, b und c positive ganze gerade Zahlen, so, dass a, b und c die Seitenlängen eines Dreiecks sind.
Man zeige: Es gibt positive ganze Zahlen x, y und z mit

$$a = y + z$$
$$b = z + x$$
$$c = x + y.$$

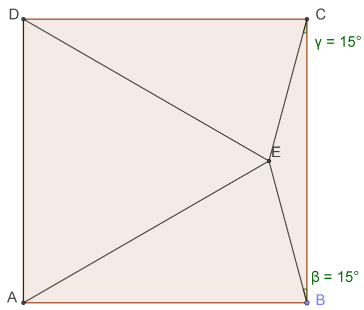
Aufgabe 3.24. Auf den Seiten AB, BC, CD und DA des Einheitsquadrats (Seitenlänge ist 1) wird jeweils ein Punkt P, Q, R bzw. S markiert. Diese vier Punkte sind Eckpunkte eines Vierecks $PQRS$ mit den Seitenlängen $a = PQ$, $b = QR$, $c = RS$ und $d = SP$.
Man zeige, dass

a) $a + b + c + d \leq 4$
b) $a + b + c + d \geq 2\sqrt{2}$

Trigonometrie.

Aufgabe 3.25. Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$.

Die Winkel $\angle CBE = 15°$ und $\angle ECB = 15°$ werden eingezeichnet. Der Punkt E befindet sich im Inneren des Quadrats.
Zeige, dass das Dreieck DAE gleichseitig ist.



4. Zahlentheorie

Teiler, Teilbarkeit, Primzahlen, Primfaktoren.

Aufgabe 4.1. Für welche ganzen Zahlen x ist

$$|x \cdot (x + 2) - 3|$$

eine Primzahl?

Aufgabe 4.2. Für welche Primzahlen p und q ist

$$p^q + q^p$$

eine Primzahl?

Aufgabe 4.3. Sei $p > 3$ eine Primzahl.

Zeige, dass der Ausdruck

$$T = ab^p - ba^p$$

durch 6 teilbar ist.

Aufgabe 4.4. Der **Satz von Fermat** für Primzahlen p lautet:

Satz (Kleiner Satz von Fermat)**.** *Für beliebige Primzahlen a gilt*

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

Wenn $ggt(a, p) = 1$, dann gilt

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Zeige:

$$323 | \left(3^{34} - 3^{18} - 3^{16} + 1\right).$$

Aufgabe 4.5. Zeige, dass der Ausdruck T von Aufgabe 4.3 sogar durch $6p$ teilbar ist.

Aufgabe 4.6. Zeige, dass für beliebige positive ganze Zahlen a, b, c und d die Zahl

$$a^{4b+d} - a^{4c+d}$$

durch 30 teilbar ist.

Aufgabe 4.7. Man zeige: Für beliebige positive ganze Zahlen a und b lässt sich der Bruch

$$\frac{a^2 \cdot (a^2 + 5)}{7b \cdot (5b^2 + 1)}$$

durch 6 kürzen.

Aufgabe 4.8. Zeige, dass 11 ein Teiler von $3^{73} - 5$ ist.

Aufgabe 4.9. Zeige, dass 91 ein Teiler von $5^{36} - 1$ ist.

Aufgabe 4.10. Die Zahl x sei die kleinste positive ganze Zahl, so dass $2x$ eine Quadratzahl, $3x$ eine Kubikzahl und $5x$ die 5. Potenz einer ganzen Zahl ist.

a) Gib die Primfaktorzerlegung von x an
b) Wie viele Teiler hat x?

Aufgabe 4.11. Seien x, y und z ganze Zahlen. Zeige:
Wenn $x + y^2 = 19^z$ gilt, dann ist 90 kein Teiler von $x^2 + y$.

Aufgabe 4.12. Für die ganzen Zahlen x und y sei $x + y \neq 0$.
Zeige, dass

$$\frac{x^2y^2 + 1}{3(x + y)}$$

keine ganze Zahl ist

Aufgabe 4.13. Zeige, dass sich

$$\frac{21n + 4}{14n + 3}$$

für keine natürliche Zahl n kürzen lässt.

Aufgabe 4.14. Eine Zahl besteht aus sieben verschiedenen Ziffern und ist durch jede dieser Ziffer teilbar. Welche drei Ziffern kann diese Zahl nicht enthalten?

Quadrate.

Aufgabe 4.15. Es gibt keine vier aufeinander folgenden ganzen Zahlen, deren Produkt um 1993 kleiner ist als eine Quadratzahl. Zeige dies.

Restklassen.

Aufgabe 4.16. a) Bestimme die Einerstelle von 3^{100}
b) Bestimme die Zehnerstelle von 3^{100}.

Aufgabe 4.17.
Sei n eine ganze Zahl. $S(n) = n^0 + n^1 + \ldots + n^{2000}$. Bestimme die Einerziffer von $S(n)$.

Diophantische Gleichung.

Aufgabe 4.18. Löse in den natürlichen Zahlen:

$$x^2 + x \cdot y = 2021.$$

Aufgabe 4.19. Löse in den positiven ganzen Zahlen

$$x^3 - y^3 = 117.$$

Aufgabe 4.20. Für welche ganzen Zahlen x, y gilt $x^2 + 3x = y^2$?

Aufgabe 4.21. Zeige: Wenn für ganze Zahlen a, b, c und d die Gleichung

$$7a + 8b = 14c + 28d$$

gilt, so ist $a \cdot b$ durch 14 teilbar.

Aufgabe 4.22. Zeige: Es gibt keine positiven ganzen Zahlen a und b mit

$$4a(a+1) = b(b+3).$$

Aufgabe 4.23. In der „*pythagoreischen Gleichung*“ $a^2 + b^2 = c^2$ mit a, b, $c \in \mathbb{Z}^+$ können nicht beide Katheten a und b ungerade Zahlen sein.
Zeige dies.

Hinweise zu den Aufgaben

Aufgabe 1.1. Fallunterscheidung oder quadrieren oder graphisch lösen.

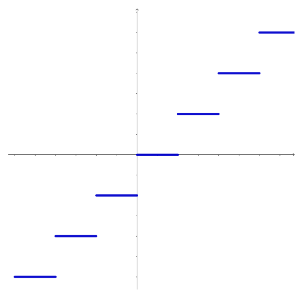
Aufgabe 1.2. Entweder: Fallunterscheidung

Fall 1. $x < \frac{2}{3}$
Fall 2. $\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{10}{7}$
Fall 3. $x > \frac{10}{7}$ Seite gerade-ungerade

Oder: Quadrieren.

Aufgabe 1.3.

Setze $\lfloor x \rfloor =: n$ und $x = n + \varepsilon$ mit $0 \leq \varepsilon < 1$. Dies liefert eine Gleichung in ε und n.
Drücke diese Gleichung in ε aus und nutze aus, dass der entsprechende Term im Intervall $[0; 1)$ liegt.



Aufgabe 1.4. Mögliche Methoden:

a) graphische Darstellung
b) Fallunterscheidung
c) Setze $x = n + \varepsilon$ mit $0 \leq \varepsilon < 1$.

Aufgabe 1.5. Quadrieren. Definitionsmenge beachten!

Aufgabe 1.6. Achtung: Vor dem Kürzen muss erst sichergestellt sein (mittels Fallunterscheidung), dass nicht durch 0 gekürzt wird.

Verwende anschließend $A^2 - B^2 = 0 \Leftrightarrow (A - B) \cdot (A + B) = 0$.

Aufgabe 1.7. $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$. Dann Vorsicht beim „Kürzen“.

Aufgabe 1.8. Mit Hilfe der ersten Gleichung kann man in der zweiten Gleichung eine Variable schnell ersetzen.

Aufgabe 1.9. Für x unterscheide zwischen $x = 0$ und $x \neq 0$.
Für welche Zahlen a und b kann $a^b = 1$ sein?
(Beachte auch den Fall, dass b gerade ist.)

Aufgabe 1.10. Für welche ganzen Zahlen a und b ist $a^b = 4$?

Aufgabe 1.11. Multiplikation mit a und binomischer Lehrsatz

Aufgabe 1.12. Gemeinsamer Nenner!

Aufgabe 1.13. Hier empfiehlt sich ein indirekter Beweis!

Aufgabe 1.14. Beweise alle diese Ungleichungen durch Umformen auf vollständige Quadrate!

Aufgabe 1.15. Beweise alle diese Ungleichungen durch Umformen auf vollständige Quadrate!

Aufgabe 1.16. Verwende die arithmetisch- geometrische Mittelungleichung

Aufgabe 1.17. Auf gemeinsamen Nenner bringen!

Aufgabe 1.18. Mittelungleichungen!

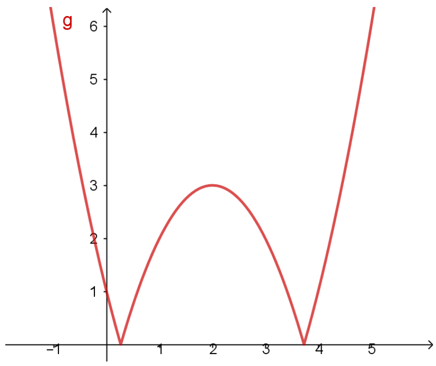
Aufgabe 1.19. AM-GM Ungleichung.

Aufgabe 1.20. Binome ausquadrieren und dann auf gemeinsamen Nenner bringen.

Aufgabe 1.21. Führe einen indirekten Beweis. Nimm $x + y > 2$ an und führe das auf einen Widerspruch.

Aufgabe 1.22.
Verwandle in die Form $A^2 + B^2 \geq 0$

Aufgabe 1.23.



Für die rechte Seite der Ungleichung kann man den Betrag weglassen. Warum?
Für die linke Seite der Ungleichung muss man drei Fälle unterscheiden.
(In der Figur ist der Funktionsgraph der Funktion g mit der Vorschrift $g(x) = |x^2 - 4x + 1|$ abgebildet)

Aufgabe 1.24. Auf gemeinsamen Nenner bringen.

Aufgabe 1.25. Verschärfe die Ungleichung, indem du $\sqrt{bc}$ und die beiden anderen Wurzeln mit der geometrisch- arithmetischen Mittelungleichung abschätzt.

Aufgabe 1.26. Für $0 \leq a \leq 1$ gilt: $a^2 \leq a$.

Aufgabe 1.27. Diskriminante $D = 0$.

Aufgabe 1.28. Diskriminante $D \geq 0$.

Aufgabe 1.29. Verwende den Satz von Vieta (für quadratische Gleichungen):

Satz (Satz von Vieta (für quadratische Gleichungen))**.** *Für die Lösungen x_1 und x_2 der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ gelten die beiden Gleichungen*

$$x_1 \cdot x_2 = q \quad \textit{und} \quad x_1 + x_2 = -p.$$

Die gegebene Gleichung lautet also $x_1 + x_2 = 2 \cdot x_1 \cdot x_2$.

Aufgabe 1.30. Fehlt den beiden ersten Summanden etwas zu einem vollständigen Quadrat?

Nutze: Aus $A^2 + B^2 = 0$ folgt $A = 0$ und $B = 0$.

Aufgabe 1.31. Faktorisiere die linke Seite der Gleichung.

Aufgabe 1.32. Bring auf die Form $A^2 + B^2 = \ldots$

Aufgabe 1.33. Es gilt: Aus $A^2 - B^2 = C$ folgt $(A - B) \cdot (A + B) = C$ und die Zerlegungen für C lassen sich leicht bestimmen.

Aufgabe 1.34.

b) Welche Zahl x_1 ist für x zu wählen, damit sich $P(x_1) = A_0$ ergibt?

Aufgabe 1.35:

c) A_1 ist der Koeffizient von x. Wie kommt ein Summand zustande, der x in der 1.Potenz enthält? Wähle aus einer der 20 Faktoren (=Klammern) einen mit x in der 1. Potenz und aus allen anderen Klammern die entsprechende Konstante.

d) Welche Belegung ist für x zu wählen?

Aufgabe 1.36: Setzt man die Lösung einer Gleichung in die Gleichung ein, so erhält man eine wahre Aussage.

Aufgabe 1.37: α einsetzen und dann eine Aussage über A_0 machen.

Aufgabe 1.38: $C = -2$

Aufgabe 1.39: A bestimmen und anschließend $p(x)$ durch $(x - x_1)$ dividieren.

Aufgabe 1.40. Verwende folgende Eigenschaft der Betragsfunktion: Für reelle Zahlen a und b gilt

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Aufgabe 1.41. Der Beweis wird indirekt geführt.

Angenommen es kommen nur endlich viele Primzahlen vor. Dann gibt es eine größte p. Konstruiert man die Zahl $4p! - 1$, die in a_n liegt, so zeigt sich, dass sie nur Primzahlen der Form $4k + 1$ enthalten kann. Warum gibt es fast keine Primzahlen der Form $4k + 2$?

Aufgabe 1.42. Teilbarkeit durch 5. Also schau dir die Folge $\pmod 5$ an (nicht sofort aufgeben, man muss einige Folgenglieder überblicken) und erkenne ein Muster.

Aufgabe 1.43. Dritte binomische Formel: $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$.

Aufgabe 1.44. Wie oft kommt jede der Ziffern vor?

Aufgabe 2.1. Löse die Aufgabe für $n = 1; 2; 3; 4$ und errate die Gesetzmäßigkeit, die sich dann mittels vollständiger Induktion zeigen lässt.

Aufgabe 2.2. Die Quadrate haben unterschiedliche Größen.

Aufgabe 2.3.

Aufgabe 2.4. Überlege wie viele Summen (d.h. grüne Zahlen) möglich sind.

Aufgabe 2.5: Experimentiere zunächst mit einem kleineren Raster!

Aufgabe 3.1. Winkeljagd

Aufgabe 3.2: Verwende die Eigenschaften eines gleichschenkeligen Dreiecks

Aufgabe 3.3. Berechne zunächst den Winkel der 27° größer als das arithmetische Mittel der beiden anderen ist. Er ist eindeutig bestimmt.

Aufgabe 3.4.

Aufgabe 3.5.

b) Die Diagonallängen sind fix.

Aufgabe 3.6.
$ABCD$ und $BEFG$ sind flächengleich.

Aufgabe 3.7. Beweise, dass alle Seiten des Dreiecks FCE gleich lang sind!

Aufgabe 3.8. Hier findet man kongruente Dreiecke ODER man betrachtet die Flächeninhalte passender Dreiecke

Aufgabe 3.9. $[APQF] = [AED] - [AEP] - [FQD]$ ([APQF] = Fläche des Vierecks APQF, usw.)

Aufgabe 3.10. Lege durch den Punkt A eine weitere Gerade und vergleiche die beiden entsprechenden Flächen.

Aufgabe 3.11. Die Aufgabe mit dem Rechteck kann man durch einfaches Überlegen lösen. Die allgemeine Aufgabe löst man, indem man geschickt mit der Flächenformel für ein Dreieck (Grundlinie mal Höhe durch 2) die Flächen der vier Dreiecke anschreibt.

Aufgabe 3.12. Strahlensatz

Aufgabe 3.13: Versuche jedes Drittel des Winkels zu berechnen!

Aufgabe 3.14. Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden. Die Seitensymmetralen von BC und AC sind jeweils Höhen in einem gleichschenkeligen Dreieck.

Aufgabe 3.15. Berechne die Winkel zwischen zwei Höhen und verwende den Peripheriewinkelsatz!

Aufgabe 3.16. Überlege, wann eine Gerade ein Quadrat in zwei kongruente Teile zerlegt

Aufgabe 3.17. Berechne zunächst den Winkel zwischen der Höhe durch A und der Seite AB, dann überlege wie man den Umkreismittelpunkt O ins Spiel bringen kann.

Aufgabe 3.18. Zwei Geraden sind zueinander parallel, wenn beide denselben Winkel mit ein anderen Geraden einschließen.

Aufgabe 3.19. Winkeljagd

Aufgabe 3.20. Peripheriewinkelsatz anwenden!

Aufgabe 3.21: Überlege welche zusätzliche Eigenschaften ein gleichschenkeliges Trapez hat.

Aufgabe 3.22: $BCDE$ ist ein Quadrat, ABD ein gleichseitiges Dreieck. Daraus lassen sich einige Winkeln berechnen.

Aufgabe 3.23. „Errate“ passende Ausdrücke mithilfe der Dreiecksungleichung.

Aufgabe 3.24.

a) Dreiecksungleichung
b) Spiegelungen des Einheitsquadrats

Aufgabe 3.25. Im Dreieck OEC lässt sich OE bestimmen, allerdings wird der Sinussatz verwendet.

Aufgabe 4.1. Wandle in ein Produkt um. Wann ist das Produkt mehrerer Faktoren prim?

Aufgabe 4.2. Unterscheide die Fälle

(i) p und q sind größer als 2

(ii) ...

Aufgabe 4.3. Aus $6|n$ folgt $(2|n$ und $3|n)$. Betrachte T sowohl modulo 2 als auch modulo 3.

Aufgabe 4.4. Es gilt $323 = 17 \cdot 19$. Untersuche die Potenzen von 3 (also 3^1, 3^2, 3^3, usw.) sowohl modulo 17 als auch modulo 19.

Aufgabe 4.5. Hier ist der kleine Satz von Fermat anzuwenden.

Aufgabe 4.6. Es gilt $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.

Untersuche also den Ausdruck unter dem Gesichtspunkt dieser drei Moduln.

Aufgabe 4.7. Zeige, dass sowohl der Zähler als auch der Nenner durch 2 und durch 3 teilbar ist.

Verwende quadratische Reste.

Aufgabe 4.8. Betrachte die Potenzen von 3 $\pmod{11}$ und erkenne ein Muster.

Oder setze den Satz von Fermat ein („kleiner Fermat“)

Aufgabe 4.9. $91 = 7 \cdot 13$.

Dann gehe wie in Aufgabe 4.8 vor.

Aufgabe 4.10.

Aufgabe 4.11.

Fall 1. $z = 0$ ist einfach zu erledigen

Fall 2. $z > 0$ unterscheide die linke Seite gerade-ungerade

Aufgabe 4.12. Betrachte den Zähler $\pmod 3$ und ebenso den Nenner.

Aufgabe 4.13. Wende die Teilbarkeitsregeln für Zähler Z und Nenner N getrennt an (Zeige, dass $ggT(Z, N) = 1$.)

$t \mid a \Rightarrow t \mid ka$. Aus $t \mid a$ und $t \mid b$ folgt $t \mid a + b$.

Wende diese Regeln so an, dass die Zahl, die von t geteilt wird nicht mehr von n abhängt.

Aufgabe 4.14.
Teilbarkeitsregeln verwenden

Aufgabe 4.15. Entweder ist einer der Faktoren durch 5 teilbar (1. Fall) oder keiner der Faktoren ist durch 5 teilbar (2.Fall).

Aufgabe 4.16. Betrachte die gegeben Zahl

a) Modulo 10
b) Modulo 25 und modulo 4

Aufgabe 4.17: Für $n = 0$ und für $n = 1$ und ev. für $n = 2$ lässt sich leicht die Antwort geben. Zur Bestimmung der Einerziffer betrachte S: $\pmod 5$ und $\pmod 2$.

Aufgabe 4.18. Faktorisieren

Aufgabe 4.19. Faktorisierung

Aufgabe 4.20.
Es gibt 6 Zahlenpaare.

Aufgabe 4.21. Betrachte die Gleichung unter dem Modul $m = 7$ bzw. $m = 2$.

Aufgabe 4.22. Die linke Seite lässt sich leicht (mit geeigneter Äquivalenzumformung) zu einem vollständigen Quadrat ergänzen. Dann liegt die rechte Seite zwischen zwei vollständigen Quadraten.

Aufgabe 4.23. Betrachte die Gleichung $\pmod 4$.

LÖSUNGSVORSCHLÄGE

Aufgabe 1.1.
Wir stellen drei Lösungswege vor.

1. Lösung. Mittels Fallunterscheidung.

   $x \geq 4$. In den beiden Beträgen stehen nicht-negative Zahlen und wir können die Betragsstriche „weglassen“:
   $$x - 4 = 3 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow x = 1.$$
   Da $1 < 4$ liegt dieser Wert nicht in der Definitionsmenge dieses Falls und wir erhalten (noch) keine Lösung.

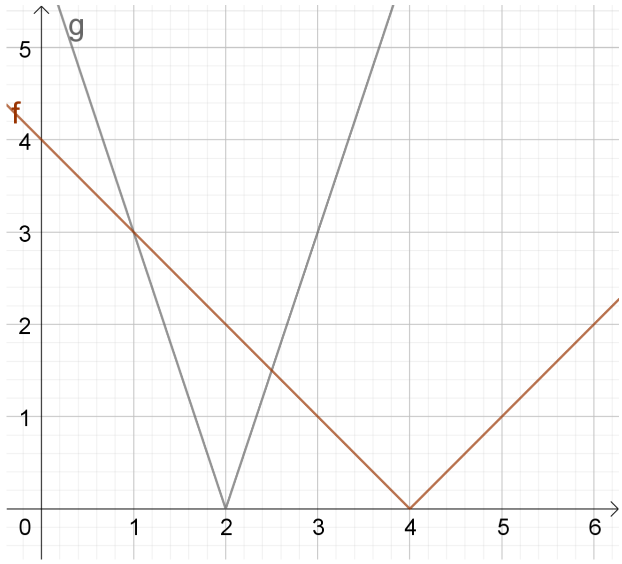
   $2 \leq x \leq 4$. In diesem Fall gilt $x - 4 < 0$ und somit $|x - 4| = -(x - 4) = 4 - x$. Weiters gilt $x - 2 > 0$ und wir können demnach folgende Gleichung lösen:
   $$4 - x = 3 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}.$$
   Die gefundene Lösung liegt wegen $2 < \frac{5}{2} < 4$ im Definitionsbereich dieses Falles.

   $x < 2$. Die Ausdrücke in beiden Beträgen sind negativ, wir können die Gleichung also äquivalent schreiben als
   $$-(x - 4) = 3 \cdot (-(x - 2)) \Leftrightarrow x = 1.$$
   Auch diese Lösung befindet sich im untersuchten Intervall.

   Zusammenfassend erhalten wir die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{1; \frac{5}{2}\}$.

2. Lösung. Es ist zulässig, die Gleichung zu quadrieren, da beide Seiten positiv sind.
   Die gegebene Gleichung ist also äquivalent zu
   $$x^2 - 8x + 16 = 9 \cdot (x^2 - 4x + 4) \Leftrightarrow 0 = 8x^2 - 28x + 20 \Leftrightarrow 0 = 2x^2 - 7x + 5 = 0$$
   Mittels (großer) quadratischer Lösungsformel erhalten wir
   $$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm 3}{2}$$
   und mittels Probe stellen wir fest, dass die beiden Zahlen $\frac{5}{2}$ und 1 tatsächlich Lösungen der gegebenen Gleichung sind.

3. Lösung Wir können die Aufgabe auch graphisch lösen. Die Ausdrücke links und rechts des Gleichheitszeichens kann man jeweils als Funktionen über den reellen Zahlen auffassen, mit der Zuordnungsvorschrift $f(x) = |x - 4|$ bzw. $g(x) = 3 \cdot |x - 2|$. Die Schnittpunkte dieser beiden Funktionen können einerseits durch Gleichsetzen ermittelt werden (das entspricht der gegebenen Gleichung) oder durch das Schneiden der beiden Funktionsgraphen in der Zeichenebene.



Aufgabe 1.2.
Wir führen eine Fallunterscheidung durch.

Fall 1. $x < \frac{2}{3}$
In diesem Intervall sind beide Ausdrücke in den Beträgen negativ (und für eine Zahl $y < 0$ gilt $|y| = -y$.) Wir betrachten also die äquivalente Gleichung

$$-(10 - 7x) = 3 \cdot (-(3x - 2)),$$

formen diese nach x um und erhalten $x = \frac{-}{2}$.

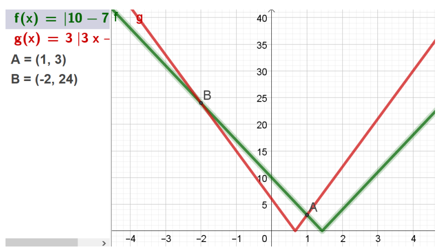
Fall 2. $\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{10}{7}$
Für eine nicht-negative Zahl y gilt $|y| = y$. Die Gleichung ist demnach äquivalent zu

$$-(10 - 7x) = 3 \cdot (3x - 2),$$

bzw. zu $x = 1$.

Fall 3. $x > \frac{10}{7}$
Umformen der Gleichung $10 - 7x = 3 \cdot (3x - 2)$ führt auf $x = -2$.

Alternativ kann der Beweis auch graphisch geführt werden, indem wir die Schnittpunkte der beiden Funktionsgraphen $f(x) = |10 - 7x|$ und $g(x) = 3 \cdot |3x - 2|$ bestimmen.



Aufgabe 1.3.
Sei $x = n + \varepsilon$ mit $\lfloor x \rfloor = n \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq \varepsilon < 1$.

Die Gleichung lautet in dieser Notation

$$4n - 3(n + \varepsilon) - 2 = 0.$$

Wir formen diese nach ε um:

$$\varepsilon = \frac{n-2}{3}.$$

Die Bedingung $0 \leq \varepsilon < 1$ bzw. $0 \leq \frac{n-2}{3} < 1$ führt auf $2 \leq n < 5$, also $n \in \{2,\, 3\, 4\}$ und folglich $\varepsilon \in \{0,\, \frac{1}{3},\, \frac{2}{3}\}$. Setzen wir diese Werte jeweils passend paarweise zusammen, so erhalten wir $\mathbb{L} = \{2,\, \frac{10}{3},\, \frac{14}{3}\}$.

Aufgabe 1.4.
Wir setzen $x = n + \varepsilon$ mit $0 \leq \varepsilon < 1$ in die gegebene Gleichung ein (damit gilt $n = \lfloor x \rfloor$):

$$\lfloor x \rfloor = \frac{5}{4}x - 2$$
$$\iff x = \frac{5}{4}(n + \varepsilon) - 2$$

Wir formen nach ε um und erhalten

$$\varepsilon = 1,6 - 0,2 \cdot n.$$

Da nun auch $0 \leq 1,6 - 0,2 \cdot n < 1$ gilt, muss $n \in \{4,\, 5,\, 6,\, 7,\, 8\}$ gewählt werden.

Damit ist die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{4\frac{4}{5},\, 5\frac{3}{5},\, 6\frac{2}{5},\, 7\frac{1}{5},\, 8\}.$$

Aufgabe 1.5.

a) Wir stellen fest, dass $x \geq 0$ gilt, denn andernfalls ist $\sqrt{x}$ nicht definiert.

Da beide Seiten der Gleichungen positiv sind, ist Quadrieren der gegebene Gleichung eine Äquivalenzumformung. Unter Anwendung des zweiten binomische Lehrsatzes erhalten wir demnach

$$\begin{aligned} x+5-2\cdot\sqrt{x+5}\cdot\sqrt{x}+x&=1\\ \Longleftrightarrow 2x+4&=2\sqrt{x+5\cdot x} \quad |:2\\ \Longleftrightarrow x+2&=\sqrt{(x+5)\cdot x} \quad |^2\\ \Longleftrightarrow x^2+4x+4&=x^2+5x\\ \Longleftrightarrow \quad x&=4. \end{aligned}$$

Da $x=4$ in der Definitionsmenge liegt, gilt $\mathbb{L}=\{4\}$.

b) Es muss jedenfalls $3x-8\geq 0 \iff x\geq\frac{8}{3}$ gelten, da ansonsten $\sqrt{3x-8}$ nicht definiert ist.
Wiederum quadrieren wir die Gleichung und formen um:

$$\begin{aligned} x-4&=\sqrt{3x-8} \quad |^2\\ (x-4)^2&=3x-8\\ x^2-8x+16&=3x-8\\ \Longleftrightarrow x^2-11x+24&=0. \end{aligned}$$

Mittels Satz von Vieta, Anwendung der (kleinen) quadratischen Lösungsformel oder duch Erraten finden wir die beiden Lösungen $x_1=8$ und $x_2=3$. Beide Zahlen sind in der Definitionsmenge, allerdings müssen wir folgendes beachten: wir haben die Gleichung quadriert, ohne sicherzustellen, dass beide Seiten der Gleichung positiv sind. Deshalb müssen wir nun die Probe machen, um sicherzustellen, ob die potenziellen Lösungszahlen tatsächlich Lösungen der Gleichung sind:

x_1: $8-4=\sqrt{3\cdot 8-8}=\sqrt{16}=4$. Das ist eine wahre Aussage, wir haben also eine Lösung gefunden.

x_2: $3-4=\sqrt{3\cdot 3-8}=\sqrt{1}=1$. Da $-1=1$ eine falsche Aussage darstellt, ist dies keine Lösung der Gleichung. (Durch das Quadrieren wurde also eine Scheinlösung erzeugt).

Wir schließen, dass $\mathbb{L}=\{8\}$.

Aufgabe 1.6.
Für $x_1=4$ sind beide Seiten der Gleichung 0, also ist dies eine Lösung.

Für $x\neq 4$ dürfen wir beide Seiten durch $x-4$ dividieren und erhalten

$$(x^2-8x+14)^2=(x-4)^2 \Leftrightarrow (x^2-8x+14)^2-(x-4)^2=0$$

Wir wenden die dritte binomische Formel, $a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$, an:

$$[(x^2 - 8x + 14) - (x-4)] \cdot [(x^2 - 8x + 14) + (x+4)] = 0.$$

Nach dem Produkt-Null-Satz ist dieser Ausdruck genau dann 0, wenn einer der beiden Faktoren (in den eckigen Klammern) Null ist.

Fall 1. $(x^2 - 8x + 14) - (x-4) = 0$ führt mittels quadratischer Lösungsformel auf $x_2 = 6$ und $x_3 = 3$.
Fall 2. $(x^2 - 8x + 14) + (x+4) = 0$ führt mittels quadratischer Lösungsformel auf $x_4 = 5$ und $x_5 = 2$.

Die Lösungsmenge ist also $\mathbb{L} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Aufgabe 1.7.
Die linke Seite der Gleichung zerfällt in

$$x^3 + a^3 = (x+a)\cdot(x^2 - ax + a^2).$$

Wir betrachten also die Gleichung

$$(x+a)\cdot(x^2 - ax + a^2) = x^2 - ax + a^2.$$

Kürzen darf man nur, wenn sichergestellt ist, dass $x^2 - ax + a^2 \neq 0$ ist. In diesem Fall erhalten wir $x_1 = 1 - a$.

Im Sonderfall $x^2 - ax + a^2 = 0$ liefert die kleine Lösungsformel $x_{2,3} = \frac{a}{2} \pm \frac{-3a^2}{2}$. Der Ausdruck unter der Wurzel ist nur für $a = 0$ reell (andernfalls imaginär). Für $a = 0$ erhalten wir die Gleichung

$$x^3 = x^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2(x-1) = 0,$$

mit den Lösungen $x = 0$ und $x = 1$.

Zusammenfassend:

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \{0;\, 1\} & \text{für } a = 0 \\ \{1-a\} & \text{für } a \neq 0 \end{cases}$$

Aufgabe 1.8.
Wir stellen fest, dass $-1 \neq a$ und $-1 \neq b$ gelten muss, damit die zweite Gleichung definiert ist.

Wir können nun die zweite Gleichung mit dem Hauptnenner $(1+a)\cdot(1+b)$ multiplizieren und erhalten die äquivalente Gleichung

$$6 + 3(a+b) = 4(1 + a + b + ab).$$

Setzen wir die erste Gleichung $a + b = 2$ ein, so gilt:

$$6 + 3 \cdot 2 = 4(1 + 2 + ab) \quad \Longleftrightarrow \quad 12 = 4 \cdot (3 + ab) \quad \Longleftrightarrow \quad ab = 0.$$

Folglich ist entweder $a = 0$ oder $b = 0$ und wir erhalten die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{(0,\, 2); (2,\, 0)\}$.

Aufgabe 1.9.
Für $x = 0$ ist jedenfalls Gleichheit erfüllt. Für $x \neq 0$ dürfen wir beide Seiten der Gleichung durch x^{28} dividieren und erhalten

$$1 = \frac{x^{3x+1}}{x^{28}} = x^{3x-27}.$$

Um keine Lösungen zu übersehen, wenden wir uns nun zunächst einer allgemeinen Potenzgleichung der Form $a^b = 1$ zu und untersuchen, wann diese erfüllt ist.

Klarerweise gilt $a^b = 1$ falls $a = 1$ gilt. In diesem Fall ist b beliebig.

Weiters gilt $a^b = 1$, falls $a = (-1)$ ist und b gerade ist.

Außerdem gilt $a^b = 1$, falls $b = 0$ gilt und $a > 0$ ist.

Die Gleichung $1 = x^{3x-27}$ ist demnach erfüllt, falls $x = 1$ ist, $x = -1$ ist (denn dann ist $3x-27 = -30$, also gerade) bzw., falls $3x - 27 = 0 \Leftrightarrow x = 9$ ist.

Folglich ist die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-1,\, 1,\, 9\}$.

Aufgabe 1.10.
Die ganzzahlige Gleichung $a^b = 4$ hat die drei möglichen Lösungen $a_1 = 4$, $b_1 = 1$, $a_2 = 2$, $b_2 = 2$ und $a_3 = -2$, $b_3 = 2$.

Wir müssen also die Gleichungssysteme der Form

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= a_i \\ 3 - x - y &= b_i \end{aligned}$$

für $i = 1,\, 2,\, 3$ lösen.

Wir bemerken zunächst, dass mittels dritter binomischer Formel $x^2 - y^2 = (x - y) \cdot (x + y)$ gilt.

Wir lösen für $i = 1$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &(x - y) \cdot (x + y) = 4 \\ &3 - x - y = 1 \iff x + y = 2. \end{aligned}$$

Setzt man $x + y = 2$ in die erste Gleichung ein, so erhält man $x - y = 2$. Daraus folgt sofort, dass $y = 0$ und somit $x = 2$ gelten muss.

Wir lösen für $i = 2$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}(x - y) \cdot (x + y) &= 2 \\ 3 - x - y = 2 \iff x + y &= 1.\end{aligned}$$

Setzt man $x + y = 1$ in die erste Gleichung ein, so erhält man $x - y = 2$. Daraus folgt, dass $x = 1,5$ und $y = -0,5$ ist, ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass beide Zahlen ganzzahlig sind.

Analog führt auch der dritte Fall zu keinem ganzzahligen Lösungspaar.

Die Lösungsmenge ist demnach $\mathbb{L} = \{(2, 0)\}$.

Aufgabe 1.11.
Die Gleichung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}a^2 + 1 &\geq 2a \\ \iff (a - 1)^2 &\geq 0,\end{aligned}$$

das ist eine wahre Aussage für alle reellen Zahlen a, da ein Quadrat stets nicht negativ ist.

Gleichheit gilt genau dann, wenn $(a - 1)^2 = 0 \iff a = 1$ gilt.

Aufgabe 1.12.
Da alle Nenner sicher positiv sind können wir die Ungleichung mit $5(x+3)(y+3)$ multiplizieren. Mit Verwendung von $xy = 4$ erhält man die äquivalente Ungleichung

$$4 \leq x + y.$$

Das folgt aber unmittelbar aus $(x + y)^2 \geq 4xy = 16$.

Gleichheit gilt für $x = y = 2$.

Aufgabe 1.13.
Wir führen einen indirekten Beweis und nehmen an, dass all diese Zahlen größer als $\frac{1}{4}$ sind, also

$$a - b^2 > \frac{1}{4}, \quad b - c^2 > \frac{1}{4}, \quad c - d^2 > \frac{1}{4}, \quad d - a^2 > \frac{1}{4}.$$

Summiert man diese vier Ungleichungen so erhält man

$$a - b^2 + b - c^2 + c - d^2 + d - a^2 > 1.$$

Das ist äquivalent zu

$$0 > a^2 - a + \frac{1}{4} + b^2 - b + \frac{1}{4} + c^2 - c + \frac{1}{4} + d^2 - d + \frac{1}{4},$$

also zu

$$0 > \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(d - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Das ist aber ein Widerspruch, daher muss mindestens eine dieser vier Zahlen größer oder gleich Null sein.

Aufgabe 1.14.
Exemplarisch soll hier eine Ungleichung bewiesen werden. Wir zeigen

$$\sqrt{x_1 x_2} \geq \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}.$$

Diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1 x_2} &\geq \frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2} \\ (x_1 + x_2)\sqrt{x_1 x_2} &\geq 2x_1 x_2 \\ (x_1 + x_2)^2 x_1 x_2 &\geq 4x_1^2 x_2^2 \\ (x_1 + x_2)^2 &\geq 4x_1 x_2 \\ (x_1 - x_2)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Gleichheit gilt für $x_1 = x_2$.

Aufgabe 1.15.
Wir beweisen etwa die Ungleichung (9):

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

Folgende Ungleichungen sind zu dieser äquivalent:

$$\begin{aligned} (a+c)(b+d) &\geq ab + 2\sqrt{abcd} + cd \\ ab + ad + cb + cd &\geq ab + 2\sqrt{abcd} + cd \\ ad + cb &\geq 2\sqrt{abcd} \\ (ad + cb)^2 &\geq 4abcd \\ (ad - cb)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Damit ist die Ungleichung bewiesen. Gleichheit gilt für $ad = cb$.

Aufgabe 1.16.
Mit der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung folgt

$$\left(a+\frac{1}{b}\right) \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Analog schätzt man die beiden anderen Ausdrücke ab. Damit erhält man eine schärfere Ungleichung die aber unmittelbar richtig ist:

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right) \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}2\sqrt{\frac{b}{c}}2\sqrt{\frac{c}{a}} = 8\sqrt{\frac{abc}{bca}} = 8.$$

Aufgabe 1.17.
Mit der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung kann man die linke Seite der Ungleichung folgendermaßen abschätzen:

$$\frac{a}{c}+\frac{c}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Es genügt daher die schärfere Ungleichung

$$2\sqrt{\frac{a}{b}} \geq \frac{4a}{a+b}.$$

zu beweisen. Das ist aber äquivalent zu

$$\frac{a}{b} \geq \frac{4a^2}{(a+b)^2}$$

also zu

$$(a+b)^2 \geq 4ab \Longleftrightarrow (a-b)^2 \geq 0.$$

Gleichheit gilt für $a=b=c$.

Aufgabe 1.18.
Es gilt:

$$x^3+y^3 = (x^2+y^2)(x+y) - xy(x+y) = (x+y)(1-xy).$$

Wir können nun die Ungleichung mit $x+y \geq 2\sqrt{x}$ verschärfen und haben

$$2\sqrt{xy}(1-xy) \geq \sqrt{xy}$$

zu zeigen. Das ist äquivalent zu

$$x^2+y^2 = 1 \geq 2xy,$$

also zu

$$(x-y)^2 \geq 0.$$

Damit ist die Ungleichung bewiesen.

Gleichheit gilt für $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Aufgabe 1.19.
Wir stellen zwei Lösungswege vor.

1. Lösung. Mittels AM-GM Ungleichung gilt
$$\frac{2x+1}{2} = \frac{x+(x+1)}{2} \geq \sqrt{x \cdot (1+x)},$$
was zu beweisen war.
2. Lösung. Es ist zulässig, die Ungleichung zu quadrieren, da beide Seiten positiv sind. Die gegebene Ungleichung ist also äquivalent zu
$$4x^2 + 4x +^{\geq} 4x^2 + 4x$$
und das ist eine wahre Aussage.

Aufgabe 1.20.
Die Ungleichung ist äquivalent zu
$$\begin{aligned}
\frac{9x^2 - 6x + 1}{x} + \frac{9y^2 - 6y + 1}{y} &\geq 1 \\
9x - 6 + \frac{1}{x} + 9y - 6 + \frac{1}{y} &\geq 1 \\
9(x+y) - 12 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &\geq 1 \\
\frac{1}{x} + \frac{1}{y} &\geq 4 \\
x + y &\geq 4xy \\
(x+y)^2 &\geq 4xy \\
(x-y)^2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Gleichheit gilt für $x = y = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 1.21.
Wir führen einen indirekten Beweis und nehmen $x + y < 2$ an. Es gilt dann

$$\begin{aligned}(x-y)^2 &\geq 0\\ x^2 - 2xy + y2 &\geq 0\\ 4 > (x+y)^2 &\geq 4xy\\ 4 &> 4xy\\ 1 &> xy.\end{aligned}$$

Mit $x + y + xy < 2 + 1 = 3$ haben wir dann einen Widerspruch. Es muss also $x + y \geq 2$ gelten.

Aufgabe 1.22.
$(2x - 1)^2 + (y - 2)^2 \geq 0$.
Gleichheit nur für $x = \frac{1}{2}$, $y = 2$

Aufgabe 1.23.
Rechts können wir den Betrag weglassen, denn

$$x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x-2)^2 + 1 \geq 1 > 0.$$

Die Gleichung $x^2 - 4x + 1 = 0$ liefert mittels quadratischer Lösungsformel die beiden Nullstellen $2 - \sqrt{3}$ und $2 + \sqrt{3}$. In diesem Intervall ist der Ausdruck $x^2 - 4x + 1$ negativ, in den beiden anderen Intervallen ist der Ausdruck positiv

Wir betrachten also drei Fälle:

(i) $x \leq 2 - \sqrt{3}$
Die Ersatzungleichung ohne Beträge lautet

$$x^2 - 4x + 1 > x^2 - 4x + 5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 > 4.$$

Dies ist ein Widerspruch, da kein x diese Ungleichung erfüllt, somit auch kein x aus unserem Intervall.

(ii) $2 - \sqrt{3} < x \leq 2 + \sqrt{3}$
Die Ersatzungleichung ohne Beträge lautet

$$\begin{aligned}&-(x^2 - 4x + 1) > x^2 - 4x + 5\\ \Longleftrightarrow\ &0 > 2x^2 - 8x + 6\\ \Longleftrightarrow\ &0 > x^2 - 4x + 3 = (x-3)\cdot(x-1).\end{aligned}$$

Das Produkt $(x-3)\cdot(x-1)$ ist genau dann negativ, wenn einer der beiden Faktoren negativ ist. Für $1 < x < 3$ ist $(x-1)$ positiv und $(x-3)$ negativ. Da $2-\sqrt{3} < 1$ und $3 < 2+\sqrt{3}$ gilt, ist das gesamte Intervall in unserer Lösungsmenge, also $\mathbb{L}_{(\text{ii})} =]1;\, 3[$.

(iii) $x > 2+\sqrt{3}$

Die Ersatzungleichung ist dieselbe wie in Fall (i), weil der Ausdruck innerhalb des Betrags der linken Seite für dieses Intervall wiederum positiv ist und somit die Betragsstriche weggelassen werden können. Wiederum ist die Ungleichung äquivalent zu $0 > 4$ und auch dieser Fall liefert keine weiteren Lösungen.

Die Lösungsmenge ist somit $\mathbb{L} = \mathbb{L}_{(\text{ii})} =]1;\, 3[$.

Aufgabe 1.24.

Bringt man die Ungleichung auf gemeinsamen Nenner so erhält man

$$a(a+b+3)(b+2) + 2b(a+1)(a+b+3) \leq 3(a+b)(a+1)(b+2).$$

Das vereinfacht sich zu

$$0 \leq (2a-b)^2.$$

Gleichheit gilt für $2a = b$.

Aufgabe 1.25.

Mit der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung gilt $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$. Mit den beiden analogen Abschätzungen kann man die Ungleichung verschärfen.

Es genügt also

$$2a^3 + 2b^3 + 2c^3 \geq a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$$

zu zeigen. Wir haben

$$a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2 \iff a^2(a-b) - b^2(a-b) \geq 0 \iff (a-b)^2(a+b) \geq 0,$$

also gilt

$$a^3 + b^3 \geq a^2b + b^2a.$$

Analog gilt

$$b^3 + c^3 \geq b^2c + c^2b \quad \text{und} \quad a^3 + c^3 \geq a^2c + c^2a.$$

Addiert man diese drei Ungleichungen so ergibt sich die Behauptung.

Gleichheit gilt für $a = b = c$.

Aufgabe 1.26.
Bringt man die Ungleichung auf gemeinsamen Nenner so erhält man die äquivalente Ungleichung

$$a^2 + b^2 \leq ab + 1.$$

Mit $0 \leq a, b \leq 1$ folgt

$$a^2 \leq a \quad \text{und} \quad b^2 \leq b.$$

Damit verschärfen wir die Ungleichung und müssen

$$a + b \leq ab + 1 \iff 0 \leq (a-1)(b-1)$$

zeigen. Mit $0 \leq a, b \leq 1$ sind die beiden Faktoren $a - 1$ und $b - 1$ negativ. Daher ist ihr Produkt positiv und die Ungleichung bewiesen. Gleichheit gilt für die Zahlenpaare $(1, 0), (0, 1)$ und $(1, 1)$.

Aufgabe 1.27.
Wir wenden die kleine quadratische Lösungsformel an:

$$x_{1,2} = -\frac{(2k+1)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(2k+1)}{2}\right)^2 - 4}.$$

Die Gleichung hat genau dann eine (Doppel-)Lösung, wenn der Wert unter der Wurzel 0 ist. wir lösen also die Gleichung:

$$\begin{aligned} \left(\frac{(2k+1)}{2}\right)^2 - 4 = 0 \\ \iff (2k+1)^2 - 16 = 0 \\ \iff 4k^2 + 4k - 15 = 0 \end{aligned}$$

Wir wenden wiederum die (große) quadratische Lösungsformel an:

$$k_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-15)}}{2 \cdot 4} = \frac{-4 \pm 16}{8},$$

also $k_1 = \frac{3}{2}$ bzw. $k_2 = -\frac{5}{2}$. Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\}$.

(Setzen wir das in die obere Gleichung ein, so schließen wir $x_{k_1} = 2$ und $x_{k_2} = -2$).

Aufgabe 1.28.
Wir wenden die große quadratische Lösungsformel mit $a = 2$, $b = 4$ und $c = C$ an und erhalten

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16 - 8C}}{2}.$$

Damit die Gleichung mindestens eine reelle Lösung hat, muss die Diskriminante (d.h. der Wert unter der Wurzel) nicht-negativ sein.

Also gilt $16 - 8C \geq 0 \Leftrightarrow C \leq 2$.

Wir erhalten $C \in \{0,\, 1,\, 2\}$.

Aufgabe 1.29.
Wir verwenden den Satz von Vieta für quadratische Gleichungen:

Satz (Satz von Vieta (für quadratische Gleichungen)). *Für die Lösungen x_1 und x_2 der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ gelten die beiden Gleichungen*

$$x_1 \cdot x_2 = q \quad \textit{und} \quad x_1 + x_2 = -p.$$

In unserem Fall gilt $p = -4a$ und $q = a - 3$. Gesucht sind jene Zahlen a, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 = 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \\ \Leftrightarrow &4a = 2 \cdot (a - 3) \\ \Leftrightarrow &a = -3. \end{aligned}$$

Die einzige Lösung ist somit $a = -3$.

Aufgabe 1.30.
Die Gleichung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} &x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 - 2y + 1 = 0 \\ &(x - 2y)^2 + (y - 1)^2 = 0. \end{aligned}$$

Damit Gleichheit erfüllt ist, muss jeder der beiden Klammerausdrücke gleichzeitig 0 sein, also $x = 2y$ und $y = 1$. Folglich gilt $x = 2$ und wir erhalten $\mathbb{L} = \{(2,\, 1)\}$.

Aufgabe 1.31.
Die linke Seite der Gleichung lässt sich zerlegen in $x \cdot (y - 1) \cdot (y - x)$.

Damit dieses Produkt 0 ist muss mindestens einer der Faktoren 0 sein.

Also gilt entweder $x = 0$ oder $y = 1$ oder $y = x$.

Wir erhalten die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{(t,\, 1);\, (0,\, t);\, (t,\, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 1.32.
Wir ergänzen auf vollständige Quadrate:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 - 2y = 0 \\ \iff (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) = 4 + 1 \\ \iff (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5 \end{aligned}$$

Die Summe zweier Quadrate ist nur dann 5, wenn das eine Quadrat 4 ist und das andere 1. Darum muss eine der Klammern gleich ± 2 und die andere gleich ± 1 sein.

Wir müssen also die folgenden acht Fälle betrachten

$x-2$	$y-1$	x	y
1	2	3	3
1	-2	3	-1
-1	2	1	3
-1	-2	1	-1
2	1	4	2
2	-1	4	0
-2	1	0	2
-2	-1	0	0

Die Lösungsmenge ist demnach $\mathbb{L} = \{(3,\,3),\,(3,\,-1),(1,\,3),\,(1,\,-1),\,(4,\,2),\,(4,\,0),\,(0,\,2),\,(0,\,0),\}$.

Aufgabe 1.33.
Wir formen die gegebene Gleichung durch Ergänzen auf vollständige Quadrate um:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - 6x - 2y + 5 = 0 \\ \iff (x^2 - 6x + 9) - (y^2 + 2y + 1) + 5 = 0 + 9 - 1 \\ \iff (x-3)^2 + (y+1)^2 = 3 \\ \iff (x - 3 + y + 1) \cdot (x - 3 - y - 1) = 3. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir dabei die dritte binomische Formel, $A^2 - B^2 = (A+B) \cdot (A-B)$, verwendet.

Das Produkt zweier ganzer Zahlen ist genau dann 3, wenn eine der beiden Zahlen 1 und die andere gleich 3 ist, oder wenn die eine Zahl -1 und die andere gleich -3 ist.

Das ergibt also die folgenden vier Fälle, die in nachstehender Tabelle aufgelistet und bereits nach x und y aufgelöst sind:

$x+y-2$	$x-y-4$	x	y
1	3	5	-2
3	1	5	0
-1	-3	1	0
-3	-1	1	-2

Die Lösungsmenge ist demnach $\mathbb{L} = \{(5,\ -2),\ (5,\ 0),\ (1,\ 0),\ (1,\ -2)\}$.

Aufgabe 1.34.

a) $11 \cdot 2 + 10 \cdot 2 = 42$
b) $A_0 = P(0) = (1 + 0 + 0^2)^{11} \cdot (2 - 0 - 0^2)^{10} = 2^{10} = 1024$

Aufgabe 1.35.

a) 40
b) $A_0 = F(0) = 1$
c)

$$(1 - x + x^2)^{10} \cdot (1 + x - x^2)^{10} = \tag{11}$$

$$(1 - x + x^2) \cdot (1 - x + x^2) \cdot \ldots \cdot (1 - x + x^2) \cdot (1 + x - x^2) \cdot (1 + x - x^2) \ldots \cdot (1 + x - x^2) \cdot (1 + x - x^2) \tag{12}$$

$$\text{Der lineare Summand ergibt sich zu} \tag{13}$$

$$x \cdot (-1 \cdot 1^{19} + 1 \cdot 1^{19}) = 0 \cdot x \tag{14}$$

d) Summe der Koeffizienten $= F(1) = 1$

Aufgabe 1.36.
$f(1) = 0 \quad 1^3 - A_2 1^2 - 5 \cdot 1 + A_0 = 0 \qquad -A_2 + A_0 = 4$
$f(3) = 0 \quad 3^3 - A_2 3^2 - 5 \cdot 3 + A_0 = 0 \qquad -9A_2 + A_0 = -12$
liefert $A_2 = 2 \quad A_0 = 6$
Die dritte Lösung ist $x_3 = -2$

Aufgabe 1.37.
$A_n\alpha^n + \ldots + A_1\alpha = -A_0$
$\alpha \cdot (A_n\alpha^n - 1 + \ldots + A_1) = -A_0.$
Daraus folgt, dass α Teiler von A_0 ist.

Aufgabe 1.38.
Einsatz der Lösungsformel für die qu. Gleichung:
$x_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{9-8C}}{4}$ und das Produkt ergibt
$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-3+\sqrt{})(-3+\sqrt{})}{4\cdot 4}$
Das ergibt $C = -2$, somit $x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = -2$

Aufgabe 1.39.
$f(1) = 1^3 + A \cdot 12 - 5 \cdot 1 + 6 = 0$ ergibt $A = -2$. Die beiden restlichen Lösungen erhält man durch Polynomdivision von $f(x)$ durch $(x - 1)$ und anschließendem Lösen der quadratischen Gleichung. Günstig: Verwendung des Hornerschemas.

Aufgabe 1.40.
Wir verwenden die folgende Eigenschaft der Betragsfunktion:

Für reelle Zahlen a und b gilt
$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$
Gleichheit gilt genau dann, wenn a und b dasselbe Vorzeichen haben (d.h. $\operatorname{sgn}(a) = \operatorname{sgn}(b)$.) oder einer der beiden Zahlen 0 ist.
(*Merke:* Der Betrag der Summe ist kleiner oder gleich der Summe der Beträge.)

Fasst man die beiden äußeren (und anschließend die beiden inneren) Summanden zusammen, so erhält man

$$|x - 1 + |x - 4| = |1 - x| + |x - 4| \geq |1 - x + x - 4| = |-3| = 3$$
mit Gleichheit für alle $x \in [1, 4]$ (weil nur in diesem Intervall $\operatorname{sgn}(1 - x) = \operatorname{sgn}(x - 4)$ gilt bzw. einer der beiden Terme 0 ist) und ebenso
$$|x - 2| + |x - 3| = |2 - x| + |x - 3| \geq |2 - x + x - 3| = |-1| = 1$$
mit Gleichheit für alle $x \in [2, 3]$.

Die Summe dieser beiden Ungleichungen liefert
$$|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + |x - 4| \geq 4$$

mit Gleichheit für alle $x \in [2, 3]$.

Aufgabe 1.41.
Wir beweisen die Aussage indirekt. Sei p die größte in a_n vorkommende Primzahl.

Wir bilden die Zahl $x = 4p! - 1$, die natürlich ein Element der Folge a_n ist.

Außerdem ist x zu allen Primzahlen, die kleiner oder gleich p sind relativ prim. Die Zahl x kann keine Primteiler der Form $4k-1$ besitzen. Also sind alle Primfaktoren von x von der Gestalt $4k+1$. Bldet man das Produkt von $4k+1$ mit $4l+1$, so erhält man wieder eine Zahl der Form $4m+1$. Daraus folgt, dass x prim ist. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung und die Folge enthält unendlich viele Primzahlen.

Aufgabe 1.42.
Wir betrachten die Folgenglieder modulo 5:

$$(a_n)_{(\text{mod } 5)} = (1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 1,\ 0,\ 3,\ 3,\ 2,\ 4,\ 1,\ 2,\ 0, 3,\ \ldots).$$

Für $n = 6$ erhalten wir $a_6 \equiv 0 \pmod 5$, ebenso für $n = 13$. Der Zyklus

$$0,\ 3,\ 3,\ 2,\ 4,\ 1,\ 2$$

wiederholt sich fortlaufend ab $n = 6$.

Kurz: für $n \equiv 6 \pmod 7$ erhalten wir 0 und sonst nicht. Da $2022 = 288 \cdot 7 + 6 \equiv 6 \pmod 7$ ist a_{2022} duch 5 teilbar.

Die Einerstelle ist demnach entweder 5 oder 0. Zur Bestimmung der Einerstelle müssen wir den Modul 10 wählen. Eine ähnliche Betrachtung wie oben – ein Zyklus hat die Länge 14 – liefert, dass die Einerstelle 0 ist.

Aufgabe 1.43.
Wir fassen jeweils zwei der 2022 Summanden zusammen und wenden die dritte binomische Formel an, $a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$:

$$\begin{aligned} S &= (2021^2 - 2020^2) + (2019^2 - 1018^2) \pm \ \ldots\ + (1^2 - 0^2) = \\ &= (2021 + 2020) \cdot (2021 - 2020) + (2019 + 2018) \cdot (2019 - 2018) \pm \ \ldots\ + (1+0) \cdot (1-0) = \\ &= 4041 \cdot 1 + 4037 \cdot 1 + \ \ldots\ + 5 + 1. \end{aligned}$$

Diese Summe besteht aus 1011 Ausdrücken und wir wenden darauf die Summenformel für arithmetische Reihen an:

$$S = 4041 \cdot 1 + 4037 \cdot 1 + \ \ldots\ + 5 + 1 = \frac{(4041+1) \cdot 1011}{2} = 2043231.$$

Aufgabe 1.44.
Da wir an den Ziffernsummen und somit an den Ziffern der Zahlen interessiert sind, versuchen wir zunächst herauszufinden, wie oft jede der Ziffern vorkommen. Die letzte Zahl lassen wir vorläufig weg (liefert 1).

Wir stellen fest, dass zwischen 1 und 999999 jede der Ziffern 0, 1, ..., 8 und 9 *gleich oft* vorkommen, wie man in nebenstehender Liste aller Zahlen sehen kann.
Um die Ziffernsumme zu bestimmen, genügt es also, Summe der einzelnen Spalten aufzuaddieren.

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	2
0	0	0	0	0	3
			⋮		
9	9	9	9	9	8
9	9	9	9	9	9

Mit Gauß'scher Summenformel berechnen wir

$$0 + 1 + \ldots + 9 = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45.$$

In jeder Spalte gibt es 1000000 Ziffern, somit ist die Summe in jeder Spalte gleich

$$\frac{1000000}{10} \cdot 45.$$

In allen sechs Spalten zusammen ergibt das, wenn man die letzte Zahl auch noch berücksichtigt, erhalten wir die gesuchte Zahl,

$$6 \cdot 100000 \cdot 45 + 1 = 27000001.$$

Aufgabe 2.1.
Wir probieren für kleine Werte von n und erhalten dadurch die folgenden Werte für die Minimalzahl a_n an Schritten:

n	1	2	3
a_n	1	3	7

Tabelle 1. Quadratische Reste (mod 3).

Folgende Idee – die mittels vollständiger Induktion formalisiert werden kann – hilft uns, von n auf $n + 1$ zu schließen:

Man transportiert zuerst die ersten n Scheiben (mit a_n Operationen) auf einen der beiden anderen Türme. Dann wird die Scheibe $n+1$ auf den 3. Turm gesetzt und anschließend werden die n Scheiben auf due Scheibe $(n+1)$ zurücktransportiert. Dies ergibt insgesamt $2a_n+1$ Operationen. Diese Anzahl ist minimal, da das zweimalige Transportieren der n Scheiben nötig ist und jeweils mindestens a_n Schritte benötigt.

Also

$$a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad \text{mit } a_1 = 1.$$

Diese rekursive Darstellung der Folge lässt sich leicht explizieren:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n + 1 = 2\cdot(2a_{n-1}+1)+1 = 2^2 a_{n-1} + (1+2) = \\ &= 2^2(2a_{n-2}+1) + (1+2) = 2^3 a_{n-2} + (1+2+2^2) = \ldots = \\ &= 2^n a_{n-(n-1)} + (1+2+2^2+\ \ldots\ +2^{n-1}) = \\ &\overset{\text{geom. Reihe}}{=} 2^n a_1 + (2^n - 1) \overset{a_1=1}{=} 2^n + 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1. \end{aligned}$$

Somit ist

$$a_n = 2^n - 1.$$

Aufgabe 2.2.

a) Offensichtlich sind 16 kleine 1×1-Quadrate zu sehen. Allerdings gibt es auch 2×2-Quadrate, 3×3-Quadrate und ein 4×4-Quadrat, die berücksichtigt werden müssen. Um alle Quadrate gut zählen zu können, markieren wir jeweils den linken unteren Eckpunk eines solchen Quadrats.

Betrachten wir zunächst die 2×2-Quadrate, so stellen wir fest, dass es 3 Möglichkeiten für die Wahl des linken unteren Eckpunktes gibt, wenn eine Quadratseite auf der untersten Seite des 4×4-Quadrates liegen soll (ganz links, Mitte-links und Mitte). Auch für die beiden darüber liegenden Rasterlinien gibt es jeweils 3 Möglichkeiten. Insgesamt gibt es also $3\cdot3=3^2$ verschiedene 2×2-Quadrate.

Mit denselben Überlegungen schließen wir, dass es $2\cdot2=2^2$ verschiedene 3×3-Quadrate gibt.

Analog gibt es $16=4^2$ verschiedene 1×1-Quadrate und 1^2 verschiedene 4×4-Quadrate (diese Anzahlen wussten wir bereits).

In Summe gibt es $1^2+2^2+3^2+4^2=30$ Quadrate.

b) Für den 8×8-Raster (bzw. das Schachbrett) nutzen wir dieselben Überlegungen, also gibt es $1^2+2^2+\ \ldots\ +7^2+8^2$ Quadrate.

Um diese Anzahl nicht mühsam berechnen zu müssen, benutzen wir die Formel für die Summe von Quadratzahlen:

Satz (Summe von Quadratzahlen)**.** *Für jede positive ganze Zahl n gilt*

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$$

Beweis. Wir weisen die Gültigkeit der Formel mittels vollständiger Induktion nach.

Induktionsbasis: Sei $n = 1$. Dann gilt $1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot (3)}{6} = 1$.

Induktionsvoraussetzung (I.V.): $1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$.

Induktionsbehauptung: $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{()n+1) \cdot (n+1+1) \cdot (2(n+1)+1)}{6}$.

Induktionsschritt:

Wir formen die linke Seite der Induktionsbehauptung um:

$$\underbrace{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}_{} + (n+1)^2 \overset{I.V.}{=} \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) + 6(n+1)^2}{6} =$$

$$= \frac{(n+1) \cdot (n \cdot (2n+1) + 6(n+1))}{6} = \frac{(n+1) \cdot (2n^2 + 7n + 6)}{6} =$$

$$= \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (2n+3)}{6}.$$

(Alternativ kann man auch statt der Faktorisierung nachweisen, dass der erste Ausdruck nach dem Gleichheitszeichen $\overset{I.V.}{=}$ mit der rechten Seite der Induktionsbehauptung) übereinstimmt. $\square$

Die gesuchte Anzahl an Quadraten im 8×8-Raster ist also

$$1^2 + 2^2 + \ldots + 7^2 + 8^2 = \frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} = 204.$$

Aufgabe 2.3.

x	y	z	Anzahl
19	1	1	1
18	2	1	1
17	3	1	2
	2	2	
16	4	1	2
	3	2	
...	...	...	...
11	9	1	5
	8	2	
	7	3	
	6	4	
	5	5	
10	10	1	5
	9	2	
	8	3	
	7	4	
	6	5	
9	9	3	4
	8	4	
	7	5	
	6	6	
8	8	5	2
	7	6	
7	7	7	1

Ges.:$1+1+2+2+3+3+4+4+5+5+4+2+1 = 2\cdot(1+\ldots+5)+4+2+1 = 2\cdot(1+5)\cdot\frac{5}{2}+7 = 37$
Auf entsprechende Art wird auch für $n = 2021$ vorgegangen. Dies liefert 340370 mögliche Darstellungen.

Aufgabe 2.4.
Wir nehmen an, dass alle grünen Zahlen verschieden sind. Als Summen zweier roter Zahlen können die grünen Zahlen $3, 4, 5, \cdots 15$ auftreten. Da ein Würfel 12 Kanten hat, kann eine dieser 13 Zahlen nicht als Summe auftreten. Die Summe der grünen Zahlen $3+4+\cdots 15$ beträgt 117. Die Summe der roten Zahlen $1+2+\cdots 8$ beträgt 36. Da in jeder Ecke des Würfels drei Kanten zusammenlaufen, ist jede rote Zahl dreimal als Summand für ein grüne Zahl beteiligt. Daher ist die Summe aller grüner Zahlen gleich $3\cdot 36 = 108$ und mit $117-108 = 9$ folgt, dass 9 nicht als grüne Zahl auftreten kann.

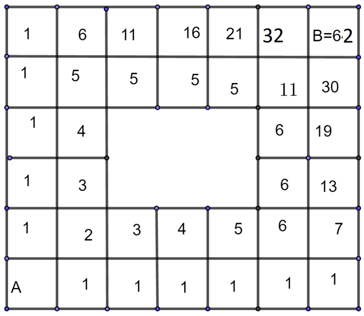
Also müssen die Summen $15, 14, 13$ und 12 auftreten. Wir zeigen, dass das unmöglich ist.

Für 15 gibt es nur die Möglichkeit $15 = 7 + 8$. Für 14 gibt es nur die Möglichkeit $14 = 8 + 6$. Für 13 gibt es die Möglichkeiten $13 = 7 + 6$ oder $13 = 8 + 5$. Die erste Möglichkeit scheidet aus, weil 6 und 7 beide Endpunkte einer Kante durch 8 sind und daher nicht beide Endpunkte ein und derselben Kante sein können. Also ist $13 = 8 + 5$. (Die drei Endpunkte der Kanten durch 8 sind daher $5, 6$ und 7.) Versucht man nun 12 als Summe darzustellen, hat man die Möglichkeiten $12 = 7 + 5$ und $12 = 8 + 4$. Beides ist aber unmöglich.

Daher kann man die roten Zahlen nie so anordnen, dass alle grünen Zahlen verschieden sind.

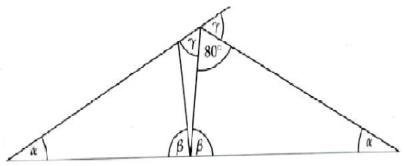
Aufgabe 2.5.

In nebenstehender Figur ist in jedes Feld die Anzahl der verschiedenen möglichen Wege zu diesem Feld eingetragen. Man erhält auf diese Weise 64 verschiedene Wege von A nach B.



Aufgabe 3.1.

Zunächst folgt $2\gamma + 80° = 180°$, daraus folgt $\gamma = 50°$. Weiters ist γ Außenwinkel im gleichschenkeligen Dreieck mit Basiswinkel α. Daraus folgt $\gamma = 2\alpha$, also $\alpha = 25°$.



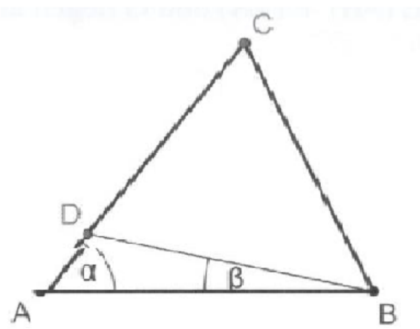
Schließlich gilt $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, also $\beta = 75°$.

Aufgabe 3.2.

Die Winkel $\angle BCA$ und $\angle ABC$ sind gleich groß, daher gilt $2\angle BCA + \alpha = 180°$, also $\angle BCA = \frac{180° - \alpha}{2}$.

Die Winkel $\angle CDB$ und $\angle BCD = \angle BCA$ sind ebenfalls gleich groß und mit $\angle BCD = \alpha + 12°$ gilt daher

$$\frac{180° - \alpha}{2} = \alpha + 12°.$$



Daraus ergibt sich $\alpha = 52°$.

Aufgabe 3.3.
Es sei oBdA $\alpha = \frac{\beta+\gamma}{2} + 27°$. Mit $\beta + \gamma = 180° - \alpha$ folgt $\alpha = 78°$ und $\beta + \gamma = 102°$. Es kann nun α doppelt so groß wie β bzw. γ sein, oder β doppelt so groß wie γ bzw. genau umgekehrt. Im ersten Fall ergibt sich $\beta = 39°$ und $\gamma = 63°$, im zweiten Fall $\beta = 34°$ und $\gamma = 68°$. Dabei können die Werte von β und γ in beiden Fällen vertauscht werden.

Aufgabe 3.4.
$|SUQ| = \frac{3}{2{,}1} \Rightarrow |UTQ| = \frac{1}{2}$. Mit dieser Methode lassen sich die Inhalte der Dreiecke RTQ; UTP; SUR; PQS; PUR bestimmen und folglich ergibt sich für $|PQR| = \frac{59}{24}$.

Aufgabe 3.5.

a)

$$\angle AND = 90°; \angle BNC = 90°. \tag{15}$$

$$|BNC| = \frac{36}{2} = 18 \tag{16}$$

$$|AND| = \frac{64}{2} = 32 \tag{17}$$

$$|ABN| = \frac{6,8}{2 \cdot \sin(30°)} = 12 \tag{18}$$

$$|CND| = \frac{6,8}{2 \cdot \sin(150°)} = 12 \tag{19}$$

$$A_{ges} = 74 \tag{20}$$

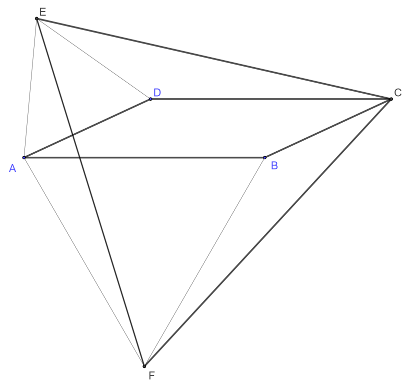
b) Die Diagonallängen AC bzw. BD sind unabhängig von der Wahl des Winkels $\angle ANB$. Folglich ist der Inhalt maximal, wenn die beiden Diagonalen normal aufeinander stehen. Wenn das der Fall ist, ist der gesuchte Winkel $\angle ANB = 30°$.

Aufgabe 3.6.
Sei P der Schnittpunkt von CD mit GF. Dann ist $ABCD$ ist flächengleich dem Parallelogramm $ABEP$. Und dieses Parallelogramm ist flächengleich $BEFG$.
Also sind die beiden rechtwinkeligen Dreiecke BCD und BFG flächengleich. Nimmt man von diesen

jeweils das Dreieck BCG weg, so sind die „Reste“ flächengleich.

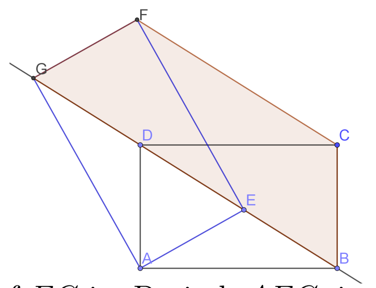
Aufgabe 3.7.
Sei $\alpha = \angle DAB$, $a = AB = CD$ und $b = BC = AD$.

Die Dreiecke AFE, BFC und DCE sind kongruent, da sie in zwei ihrer Seitenlängen (jeweils gleich a und b) und ihren eingeschlossenen Winkel ($= 120° + \alpha$) übereinstimmen.



Aufgabe 3.8.
Die folgende Skizze zeigt die in der Angabe beschriebene Situation:

Die Diagonale BD teilt das Rechteck $ABCD$ in zwei kongruente Dreiecke, deren Höhen gleich lang sind. Das gilt auch für das Rechteck $AEFG$.



Da die Höhe auf BD im Dreieck ABD identisch ist mit der Höhe auf EG im Dreieck AEG, ist alles gezeigt.

Aufgabe 3.9.
Es gilt:

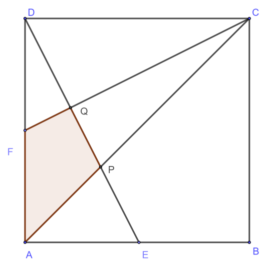
$$[APQF] = [AED] - [AEP] - [FQD],$$

($[APQF]$ = Fläche des Vierecks $APQF$, usw.) und

$$AED = \frac{[ABCD]}{4} = 225.$$

Das Dreieck FQD ist ähnlich zum Dreieck EAD. Die entsprechenden Seiten DF und DE stehen im Verhältnis

$$\frac{a}{2} : \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 1 : \sqrt{5}.$$



Daher verhalten sich die entsprechenden Flächeninhalte wie 1 : 5 und es gilt

$$[FQD] = \frac{AED]}{5} = 45.$$

Die Dreiecke APE und CPD sind ähnlich. Die entsprechenden Seiten AD und CD stehen im Verhältnis $1 : 2$. Die Höhen durch den Punkt P auf diese Seiten stehen ebenfalls im Verhältnis $1 : 2$. Daher ist die Länge der Höhe durch P auf die Seite AE gleich $\frac{a}{3}$ und es gilt

$$[AEP] = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} = 75.$$

Also haben wir

$$[APQF] = [AED] - [AEP] - [FQD] = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{20} - \frac{a^2}{12} = \frac{7a^2}{60} = 105.$$

Aufgabe 3.10.

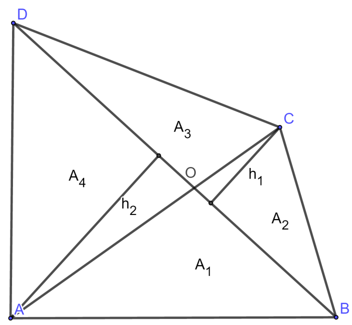
Es sei S der Scheitel des Winkels und C und D die Schnittpunkte der Geraden mit den Schenkeln. Wir legen durch A noch eine weitere Gerade. Die Schnittpunkte mit den Schenkeln seien E und F dabei sei die Bezeichnung so gewählt, dass C zwischen S und E liegt. Zieht man CG parallel zu DF bis zum Schnittpunkt G mit EF, so ist das Dreieck GAC kongruent zum Dreieck FAD (WSW-Satz). Daraus folgt

$$[SEF] = [SCD] + [CEG] \Rightarrow [SEF] > [SCD].$$

Aufgabe 3.11.

Die Fläche des gesuchten Rechtecks ist 15.

Es sei nun h_2 die Höhe durch A im Dreieck ABO bzw ADO und h_1 die Höhe durch C im Dreieck BCO bzw. CDO. Dann gilt



$$A_1 = \frac{OB \cdot h_2}{2},$$
$$A_2 = \frac{OB \cdot h_1}{2},$$
$$A_3 = \frac{OD \cdot h_1}{2},$$
$$A_4 = \frac{OD \cdot h_2}{2}.$$

Dann folgt

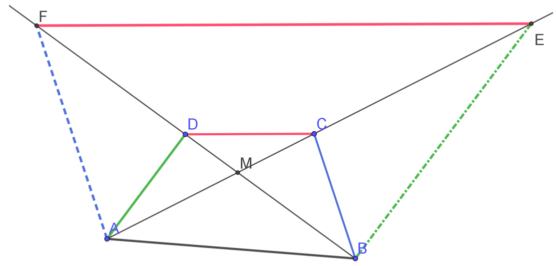
$$A_1 \cdot A_3 = \frac{OB \cdot OD \cdot h_1 h_2}{4} = A_2 \cdot A_4$$

und daher $A_2 = 4,5$.

Aufgabe 3.12.

Die folgende Skizze zeigt die beschriebene Situation der Angabe.

Die Parallele zu BC durch A und die Parallele zu AD durch B sind strichliert eingezeichnet. Die beiden Geraden CD und EF, die parallel sein sollen, sind rot eingezeichnet.



Unser Ziel ist es, nachzuweisen, dass

$$\frac{MC}{ME} = \frac{MD}{MF},$$

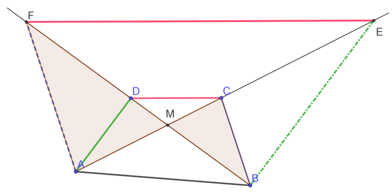
denn nach Umkehrung des Strahlensatzes wären dann die beiden Geraden EF und CD parallel.

Durch Anwendung des Strahlensatzes mit den Parallelen AF und BC ergibt sich

$$\frac{MC}{MB} = \frac{MA}{MF},$$

also

$$MB \cdot MA = MC \cdot MF.$$

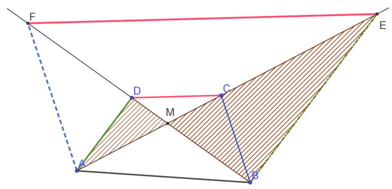


Ebenfalls durch Anwendung des Strahlensatzes mit den Parallelen AD und BE ergibt sich

$$\frac{MA}{ME} = \frac{MD}{MB},$$

also

$$MB \cdot MA = MD \cdot ME.$$



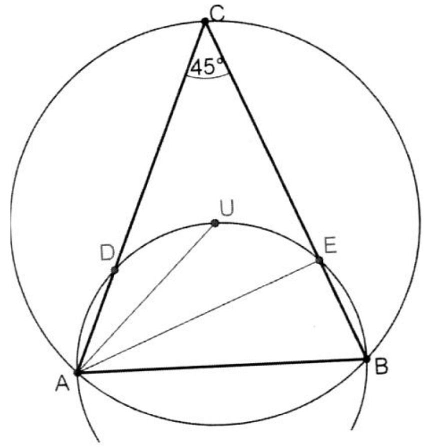
Also stimmen die beiden Terme $MC \cdot MF$ und $MD \cdot ME$ überein. Wir erhalten

$$MC \cdot MF = MD \cdot ME \iff \frac{MC}{ME} = \frac{MD}{MF},$$

was zu zeigen war.

Aufgabe 3.13.

Das Dreieck AUC ist gleichschenkelig, daher gilt $22,5° = \angle UCA = \angle CAU$.



Die Basiswinkel im gleichschenkeligen Dreieck sind gleich groß, damit folgt

$$\angle CAB = \angle ABC = \frac{180° - 45°}{2} = 67,5°.$$

Das Dreieck ABE ist rechtwinkelig (Satz von Thales). Daher gilt

$$\angle EAB = 90° - \angle ABC = 90° - 67,5° = 22,5°.$$

Daraus folgt

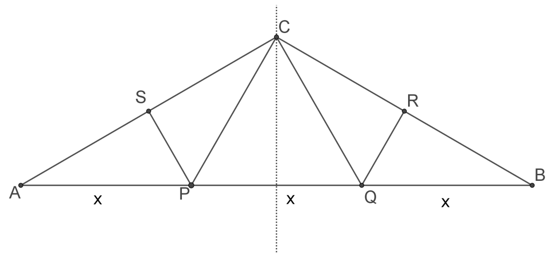
$$\angle UAE = \angle CAB - \angle CAU - \angle EAB = 67,5° - 22,5° - 22,5° = 22,5°,$$

und damit ist alles gezeigt.

Aufgabe 3.14. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(1) s_{BC} schneidet AB in Q

Das Dreieck BCQ ist gleichschenkelig, weil R der Halbierungspunkt von BC und auch der Fußpunkt der Höhe auf BC ist. Somit ist PQC ein gleichschenkeliges Dreieck (Innenwinkel 60°).



$\Rightarrow \measuredangle APS = 60°$ und folglich ist das Dreieck APS ein „halbes" gleichseitiges Dreieck (Innenwinkel 30°, 60°; 90) und $PS = \frac{x}{2}$.

$\Rightarrow AS = SC = \sqrt{x^2 - (\frac{x}{2})^2} = x\frac{\sqrt{3}}{2}$

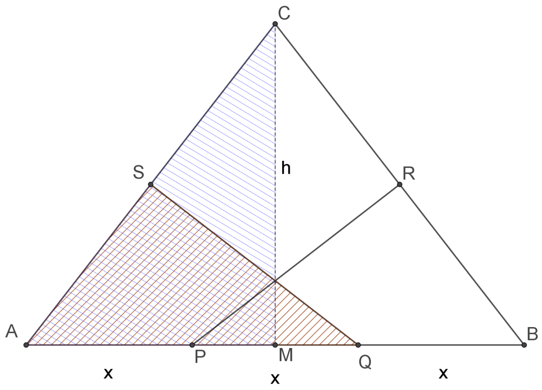
$AC = x\sqrt{3} = \sqrt{n}$ mit $x = \frac{\sqrt{57}}{3}$

$\sqrt{n} = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{57}}{3}$

ergibt $n_1 = 3 \cdot \frac{57}{9}$

(2) s_{BC} schneidet AB in P

Das rechtwinkelige Dreieck AQS ist ähnlich dem rechtwinkeligen Dreieck AMC.
Somit gilt $\frac{\sqrt{n}}{2} : (2x) = \frac{3x}{2} : \sqrt{n}$



Aufgabe 3.15.
Wir bezeichnen die Winkel des Dreiecks in gewohnter Weise mit α, β und γ und die Höhenfußpunkte mit H_a, H_b und H_c. (Dabei ist H_a der Fußpunkt der Höhe h_a durch A, usw.) Da die Höhe h_c normal auf AB und h_b normal auf AC steht, gilt

$$\angle H_bHC = \angle BHH_c = \alpha$$

und analog

$$\angle H_cHA = \angle H_aHC = \beta \quad \text{bzw.}$$
$$\angle AHH_b = \angle H_aHB = \gamma.$$

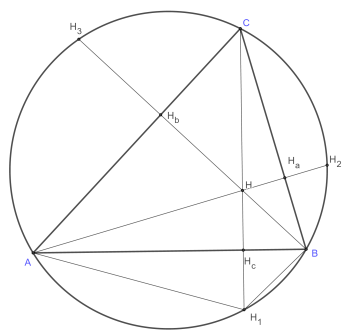
Daher gilt

$$\angle BHA = \alpha + \beta = 180° - \gamma.$$

Sei nun H_1 der an der Seite AB gespiegelte Punkt H. Dann gilt klarerweise

$$\angle AH_1B = \angle BHA = 180° - \gamma.$$

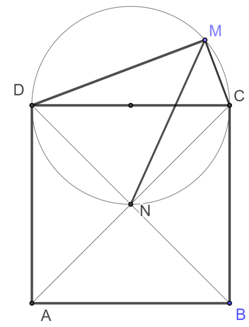
Im Viereck AH_1BC ergänzen sich daher gegenüberliegende Winkel auf 180°, sie liegen also auf einem Kreis. Da dieser Kreis durch die Punkte A, B und C geht ist es der Umkreis des Dreiecks ABC.



Analog zeigt man das auch für die beiden anderen gespiegelten Punkte.

Aufgabe 3.16.
Es sei N der Mittelpunkt des Quadrates. Eine Gerade teilt genau dann ein Quadrat in zwei kongruente

Teile, wenn sie durch den Mittelpunkt N des Quadrates geht. Wir müssen daher nur sicherstellen, dass die Winkelsymmetrale in M durch N geht.

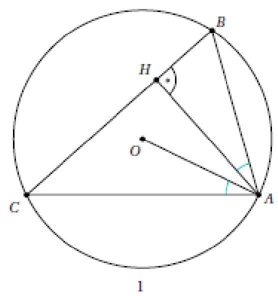


Die Punkte D, M, C und N liegen auf einem Kreis, da $\angle DMC = \angle CND = 90°$, also die Summe gegenüberliegender Winkel in diesem Viereck gleich 180° ist. (Man hätte auch mit dem Satz von Thales argumentieren können.) Mit dem Peripheriewinkelsatz über der Sehne NC folgt

$$45° = \angle CDN = \angle CMN.$$

Daher halbiert MN den Winkel $\angle CMD$ und alles ist gezeigt.

Aufgabe 3.17.
Das Dreieck ABH ist rechtwinkelig, daher sind die Winkel $\angle HBA = \beta$ und $\angle BAH$ komplementär.



Es gilt daher:

$$\angle BAH = 90° - \beta.$$

Mit dem Peripheriewinkelsatz gilt

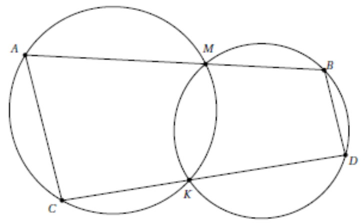
$$\angle AOC = 2 \cdot \beta.$$

Da das Dreieck AOC gleichschenkelig ist, sind die Basiswinkel gleich groß. Ihre Summe beträgt $180° - 2\beta$ und daraus folgt sofort

$$\angle CAO = \angle OCA = 90° - \beta.$$

Aufgabe 3.18.
Zwei Geraden sind zueinander parallel, wenn beide denselben Winkel mit ein anderen Geraden einschließen.

Um das zu zeigen, verwenden wir nun zweimal den Satz, dass sich in einem Sehnenviereck gegenüberliegende Winkel auf 180° ergänzen.



Das Viereck $KDBM$ ist ein Sehnenviereck, daher gilt

$$\angle BMK = 180^\circ - \angle KDB.$$

Daraus folgt $\angle KMA = 180^\circ - \angle BMK = \angle KDB$.

Da das Viereck $KMAC$ ebenfalls ein Sehnenviereck ist folgt

$$\angle ACK = 180^\circ - \angle KMA = 180^\circ - \angle KDB.$$

Die Winkel der Strecken AC und BD zur Geraden CD sind daher supplementär, d.h. die Strecken AC und CD sind zueinander parallel.

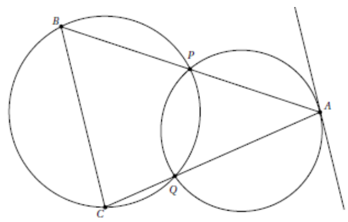
Bemerkung: Auf die Diskussion verschiedener Konfigurationen wird hier nicht eingegangen.

Aufgabe 3.19.
Das Viereck $BCQP$ ist ein Sehnenviereck, daher gilt

$$\angle PQC = 180^\circ - \angle CBP.$$

Daher gilt

$$\angle AQP = 180^\circ - \angle PQC = \angle CBP.$$

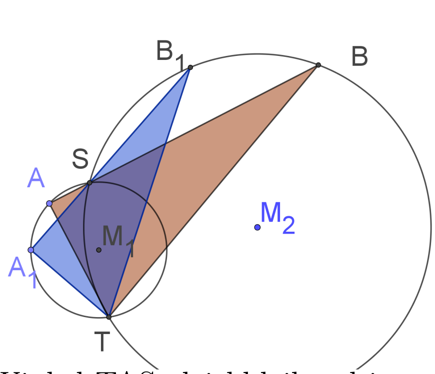


Es sei X ein beliebiger Punkt auf der Tangente. Mit dem Peripheriewinkelsatz (Sehnen -Tangentenwinkel = Peripheriewinkel) folgt dann

$$\angle XAP = \angle AQP = \angle CBP.$$

Daher schließt die Tangente denselben Winkel mit der Geraden AB ein, wie die Strecke BC.

Aufgabe 3.20.
Wir betrachten folgendes Beispiel mit Punkten A, B, A_1 und B_1.



In nebenstehender Zeichnung gilt nach Peripheriewinkelsatz, dass

$\angle TB_1S = TBS$ PW über Sehne TS

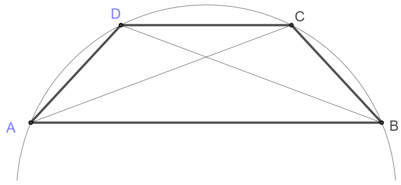
und

$\angle TA_1S = TAS$ PW über Sehne TS.

Allgemein gilt, dass nach dem Peripheriewinkelsatz der Winkel TAS gleichbleibend ist, gleichgültig, wo auch immer A auf dem Bogen liegt und ebenso der Winkel TBS, da die Sehne TS fix ist. Darum sind alle möglichen Dreiecke ABT zueinander ähnlich.

Aufgabe 3.21.
Ein gleichschenkeliges Trapez besitzt einen Umkreis.

Da zu gleich langen Sehnen gleich große Peripheriewinkel gehören sind etwa die Winkel $\angle CAB$ und $\angle DAC$ als Peripheriewinkel über den Sehnen BC und CD gleich groß.

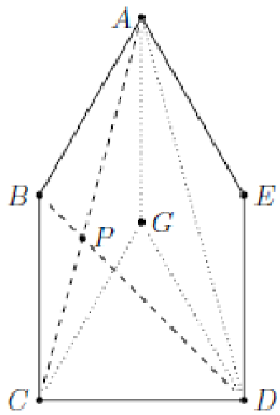


Daher halbiert die Gerade AD den Winkel $\angle CBA$.

Aufgabe 3.22.
Wegen der rechten Winkel in C und D ist $BCDE$ ein Quadrat und daher AB ein gleichseitiges Dreieck mit gleicher Seitenlänge. Somit gilt $EA = EB = ED$. Daher ist E Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABD. Wegen $\angle AEB = 60°$ gilt also nach dem Peripheriewinkelsatz

$$\angle ADB = \frac{\angle AEB}{2} = \frac{60°}{2} = 30°.$$

Verschiebt man das gleichseitige Dreieck ABE so, dass B auf C und E auf D abgebildet wird, dann erhält man als Bild des Punktes A den innerhalb des Quadrats $BCDE$ liegenden dritten Eckpunkt G des gleichseitigen Dreiecks CDG, dessen Seitenlänge mit der des Fünfecks $ABCDE$ und damit auch mit der Länge der Schiebestrecke AG übereinstimmt. Daraus folgt $GA = GC = GD$, also ist G Umkreismittelpunkt des Dreiecks ACD.



Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt daher auch

$$\angle CAD = \frac{\angle CGD}{2} = \frac{60°}{2} = 30°.$$

Das bedeutet wegen $\angle PAD = \angle CAD = \angle ADB = \angle ADP = 30°$, dass das Dreieck ADP ein gleichschenkliges Dreieck mit Basis AD ist. Daraus folgt $PA = PD$.

Aufgabe 3.23.

Die Dreiecksungleichung besagt, dass die Summe zweier Seitenlängen stets größer ist als die Länge der dritten Dreiecksseite, also z.B.

$$c + b > a \Leftrightarrow c + b - a > 0.$$

Da alle Seitenlängen gerade sind, wissen wir auch, dass $c + b - a$ gerade ist. Setzen wir nun zyklisch die Werte für x, y und z wie folgt fest,

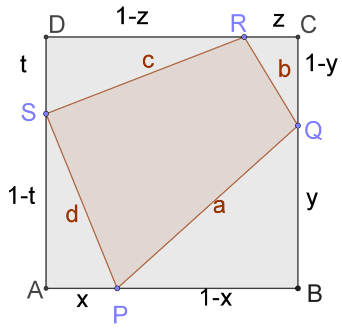
$$x = \frac{c + b - a}{2}$$
$$y = \frac{a + c - b}{2}$$
$$z = \frac{b + a - c}{2}$$

so sind alle Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt.

Aufgabe 3.24.

Wir bezeichnen die Abschnitte der Seiten des Einheitsquadrats wie in der Abbildung rechts zu sehen.

Wir wenden die Dreiecksungleichung auf alle vier Seiten des Vierecks $PQRS$ an:

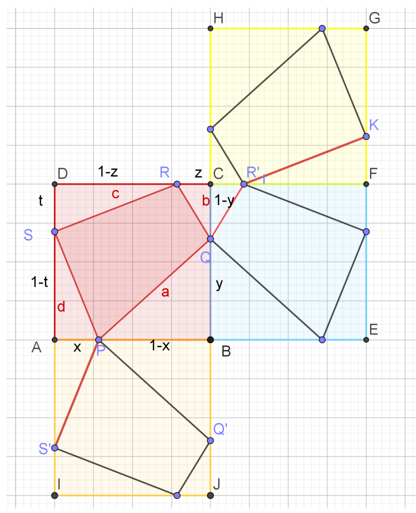


$$a < 1 - x + y \quad b < 1 - y + z \quad c < 1 - z + t \quad d < 1 - t + x$$

Addieren wir diese vier Ungleichung ergibt:

$$a + b + c + d < 4.$$

Wir spiegeln das Einheitsquadrat (mitsamt dem Viereck $PQRS$) dreimal (an AB, an BC und dann an CF) und erhalten die rechts abgebildete Figur (inklusive deren Bezeichnung).



Wir betrachten nun den Polygonzug $S'PCR'K$ mit der Länge $d+a+b+c$. Wir merken an, dass $DS = S'I = FK$ gilt. Verschiebt man also den Polygonzug $S'PQR'K$ um den Vektor $\vec{DS}$, so liegen die Endpunkte dieses Streckenzuges in I bzw. F.

Es gilt $IF = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$.

Da die Länge eines Polygonzugs von I zu F mindestens so lang ist wie die direkte Verbindungsstrecke, folgt unmittelbar die Behauptung.

Aufgabe 3.25.
Aufgrund der symmetrischen Konstruktion gilt jedenfalls $DE = AE$, das Dreieck DAE ist demnach zumindest gleichschenkelig. Sei H der Halbierungpunkt der Seite AD. Wenn wir die Länge HE bestimmen können, und diese der Höhe eines gleichseitigen Dreiecks entspricht, dann sind wir fertig.

Sei o.E. $AB = 1$.

Sei O der Schnittpunkt der beiden Diagonalen des Quadrats $ABCD$. Im Dreieck OEC kennen wir alle Winkel ($\angle EOC = 45°$, $\angle OCE = 45° - 15° = 30°$ und somit $\angle CEO = 180° - (\angle EOC + \angle OCE) =^0 5°$). Da O der Mittelpunkt der Diagonale AC ist, gilt $OC = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und dadurch ist das Dreieck nach WSW-Satz eindeutig bestimmt.

Wir wollen nun die übrigen Seiten des Dreiecks berechnen. Nach Sinussatz gilt

$$\frac{OE}{OC} = \frac{\sin 30°}{\sin 105°}.$$

Um OE zu bestimmen, benötigen wir demnach neben $\sin 30° = \frac{1}{2}$ auch den Wert von $\sin 150°$. Dafür schreiben wir $105°$ als $60° + 45°$ und verwenden die Summenformel für die Sinus-Funktion:

$$\sin \alpha + \beta = \sin \alpha \cdot \sin \beta + \cos \alpha \cdot \cos \beta.$$

Setzen wir $\alpha = 60°$ und $\beta = 45°$ ein, so erhalten wir

$$\sin 105 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3}+1)}{4}.$$

Wir können nun OE bestimmen:

$$\frac{OE}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{OE}{OC} = \frac{\sin 30°}{\sin 105°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)}{4}}$$

$$\Leftrightarrow OE = \frac{2}{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}+1)} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{1}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Unser Ziel ist es, HE zu bestimmen. Da $HE = HO + OE$ gilt $HE = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Da $\frac{\sqrt{3}}{2}$ die Höhe im gleichseitigen Dreieck mit Setenlänge 1 ist, ist der Beweis fertig.

Aufgabe 4.1.
Wir formen um: $x \cdot (x+2) - 3 = (x+3) \cdot (x-1)$.

Das Produkt kann nur dann prim sein, wenn einer der beiden Faktoren 1 oder -1 ist. Wir unterscheiden also die folgenden vier Fälle:

1. Fall: $x + 3 = 1 \Leftrightarrow x = -2$
   Es gilt dann $|(x+3) \cdot (x-1)| = |1 \cdot (-3)| = 3$, also ist $x = -2$ eine Lösung.
2. Fall: $x + 3 = -1 \Leftrightarrow x = -4$
   Es gilt dann $|(x+3) \cdot (x-1)| = |-1 \cdot (-5)| = 5$, also ist $x = -4$ eine Lösung.
3. Fall: $x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$
   Es gilt dann $|(x+3) \cdot (x-1)| = |5 \cdot 1| = 5$, also ist $x = 2$ eine Lösung.
4. Fall: $x - 1 = -1 \Leftrightarrow x = 0$
   Es gilt dann $|(x+3) \cdot (x-1)| = |3 \cdot (-1)| = 3$, also ist $x = 0$ eine Lösung.

Zusammenfassend erhalten wir die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{-4;\ -2;\ 0;\ 2\}$$

Aufgabe 4.2.
Sei o.E. $p < q$. Wir unterscheiden die beiden folgenden Fälle:

Fall 1. $2 < p < q$. Da nun p und q beide ungerade sind, ist die linke Seite der Gleichung gerade (und größer als 2). Dieser Fall gibt keine Lösung.

Fall 2. $2 = p$. Da die Summe jedenfalls eine ungerade Zahl sein muss, gilt $q > 2$ und insbesonder q ungerade.
   Wir betrachten den Ausdruck $2^q + q^2$ modulo 3.
   $q = 3$: Dies führt auf $2^3 + 3^2 = 17$. Dies ist eine Lösung.
   $q > 3$: Wir wissen, dass q nicht durch 3 teilbar ist und deshalb $q^2 \equiv 1 \pmod 3$ ist (Stichwort: quadratische Reste modulo 3).
   $2^q + q^2 \equiv (-1)^q + 1 \equiv (-1) + 1 \equiv 0 \pmod 3$.
   Da $2^q + q^2 > 3$ kann der Ausdruck nicht prim sein.

Zusammenfassend erhalten wir für $(p,\ q)$ die beiden Lösungspaare $(2,\ 3)$ und $(3,\ 2)$.

Aufgabe 4.3.
Wenn eine der beiden Zahlen (oder beide) gerade ist (sind), so gilt dies auch für T. Wenn beide ungerade sind, so ist die Differenz zweier ungerader Zahlen wieder gerade. Damit ist T in jedem Fall durch 2 teilbar.

Wir betrachten die Teilbarkeit durch 3: $T = ab(b^{p-1} - a^{p-1})$. Wenn eine der beiden Zahlen a, b durch 3 teilbar ist, so auch T.
Ist das nicht der Fall, dann gilt für $a \equiv \pm 1 \pmod 3$ und ebenfalls $b \equiv \pm 1 \pmod 3$. Der Exponent $p-1$ ist gerade und folglich ist $b^{p-1} \equiv a^{p-1} \equiv 1 \pmod 3$. Die Differenz ist also kongruent 0 modulo 3. Also ist T durch 3 teilbar.

Aufgabe 4.4.
Wir heben heraus und faktorisieren:

$$3^{34} - 3^{18} - 3^{16} + 1 = (3^{34} - 3^{16} - (3^{18} - 1)$$
$$=3^{16} \cdot (3^{18} - 1) - (3^{18} - 1) = (3^{18} - 1) \cdot (3^{16} - 1).$$

Da $323 = 17 \cdot 19$ müssen wir Teilbarkeit durch diese beiden Primzahlen nachweisen.

Der erste Faktor ist nach kleinem Fermat durch 19 teilbar, da $3^{18} = 3^{19-1} \equiv 1 \pmod{19}$ ist.

Der zweite Faktor ist nach gleichem Argument durch 17 teilbar, denn nach kleinem Fermat gilt $3^{16} = 3^{17-1} \equiv 1 \pmod{17}$.

Da der erst Fakrot durch 19 und der zweite Faktor durch 17 teilbar ist, ist das Produkt, wie behauptet, durch 323 teilbar.

Aufgabe 4.5.
Wir haben in Aufgabe 4.3 bereits nachgewiesen, dass T durch 6 teilbar ist. Da $\operatorname{ggt}(6, p) = 1$ ist, müssen wir nun nur mehr nachweisen, dass $p|T$ gilt.

Nach kleinem Satz von Fermat gilt

$$b^p \equiv b \pmod p \quad \text{und} \quad a^p \equiv a \pmod p.$$

Somit ist

$$T = a \cdot b^p + b \cdot a^p \equiv ab - ba \equiv 0 \pmod p$$

und das ist gleichbedeutend damit, dass p ein Teiler von T ist.

Aufgabe 4.6.
Wir können den Term umformen zu $a^d(a^{4b} - a^{4c})$.

Wir betrachten diesen Term auf Teilbarkeit durch 2, 3 bzw. 5.

Teilbarkeit durch 2:
Wenn a gerade ist, so ist der erste Faktor gerade.
Wenn a ungerade ist, so sind a^{4b} und a^{4c} beide ebenfalls ungerade und deren Differenz gerade. Also ist der Term gerade, d.h. durch 2 teilbar.

Teilbarkeit durch 3:
Die folgende Tabelle zeigt die Kongruenzklassen modulo 3: Ist a durch 3 teilbar, so ist der Term

a	a^4
0	0
1	1
2	1

Einträge der Tabelle sind modulo 3

jedenfalls durch 3 teilbar.

Ist a nicht durch 3 teilbar, so ist $a^{4b} = (a^4)^b \equiv 1^b = 1 \pmod 3$, und analog $a^{4c} \equiv 1 \pmod 3$. Also ist die Differenz der beiden Zahlen durch 3 teilbar und damit auch der gesamte Term.

Teilbarkeit durch 5:
Die folgende Tabelle zeigt die Kongruenzklassen modulo 5: Wir sehen, dass für jede Restklasse

a	a^4
0	0
1	1
2	1
-2	1
-1	1

Einträge der Tabelle sind modulo 5

von $a \not\equiv 0 \pmod 5$ die vierten Potenzen den Rest 1 bei Division durch 5 haben.

Wir schließen analog zur Teilbarkeit durch 3, der Term ist also auch durch 5 teilbar.

Da der Term $a^d(a^{4b} - a^{4c})$ für jedes a sowohl durch 2, durch 3 als auch durch 5 teilbar sind, ist der Term durch $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ teilbar.

Aufgabe 4.7.
Wir müssen zeigen, dass sowohl Zähler als auch Nenner durch 2 und durch 3 teilbar sind.

Wir betrachten zunächst den Zähler.

Ist a gerade, so ist der Zähler durch 2 teilbar, ist a ungerade, so ist a^2+5 gerade. Also ist der Zähler jedenfalls gerade.
Ist a durch 3 teilbar, so ist der Zähler durch 3 teilbar. Ist a nicht durch 3 teilbar, so ist $a^2 \equiv 1 \pmod 3$ und somit hat a^2+5 bei Division durch 3 den Rest 0. Also ist der Zähler jedenfalls durch 3 teilbar.

Wir betrachten nun den Nenner.

Ist b gerade, so ist der Nenner gerade. Ist b ungerade, so ist $5b^2+1$ gerade. Also ist der Nenner in jedem Fall gerade.
Gilt $3 \mid b$, so ist der Nenner durch 3 teilbar. Ansonsten gilt $b^2 \equiv 1 \pmod 3$ und $5b^2+1 \equiv 0 \pmod 3$.

Hinweis: Wir hätten a und b natürlich auch direkt für alle möglichen Restklassen modulo 6 untersuchen können.

Aufgabe 4.8.
Nach kleinem Satz von Fermat gilt $3^{11-1} \equiv 1 \pmod{11}$.

Also gilt:

$$3^{73} = \left(3^{10}\right)^7 \cdot 3^3 \equiv 1 \cdot 27 \equiv 5 \pmod{11}$$

Aufgabe 4.9.
Wir untersuchen den Ausdruck modulo 7 und modulo 13.

Es gilt (unter Verwendung des kleinen Satz von Fermat):

$$5^{36} \equiv \left(5^6\right)^6 \equiv 1 \pmod 7.$$

Analog gilt

$$5^{36} \equiv \left(5^{12}\right)^3 \equiv 1 \pmod{13}.$$

Also teilt sowohl 7 als auch 13 die gegebene Zahl. Da beide Zahlen prim sind teilt auch deren Produkt $13 \cdot 7 = 91$ den Ausdruck.

(Allgemein gilt: Teilen zwei Zahlen a und b eine Ausdruck T und ist weiters $\mathrm{ggT}(a,b)=1$, dann gilt auch: $a \cdot b \mid T$.)

Aufgabe 4.10.

$$x = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{\gamma} \tag{21}$$
$$2x = 2^{\alpha+1} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{\gamma} \tag{22}$$
$$3x = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta+1} \cdot 5^{\gamma} \tag{23}$$
$$5x = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{\gamma+1} \tag{24}$$

$\alpha + 1 \ldots$ gerade, $\alpha \ldots$ Vielfaches von 3, α Vielfaches von 5 $\Rightarrow \alpha = 15$
$\beta \ldots$ gerade, $\beta + 1 \ldots$ Vielfaches von 3, $\beta \ldots$ Vielfaches von 5 $\Rightarrow \beta = 20$
γ gerade, γ aus $\{0; 3, 6; \ldots\}$, γ aus $\{4; 9; 14; \ldots\} \Rightarrow \gamma = 24$
$x = 2^{15} \cdot 3^{20} \cdot 5^{24}$
Anzahl der Teiler $= 16 \cdot 21 \cdot 25 = 8400$.

Aufgabe 4.11.
Wir unterscheiden für z die folgenden beiden Fälle:

Fall 1. $z = 0$. Da $x + y^2 = 19^0 = 1$ gilt, können nicht beide Zahlen x und y gerade sein und auch nicht ungerade. Somit ist auch $x^2 + y$ ungerade und 2 kein Teiler davon. Also kann auch 90 kein Teiler von $x^2 + y$ sein.
Fall 2. $z > 0$. Da 19^z ungerade ist, kann man analog zum vorherigen Fall schließen.

Aufgabe 4.12.
Wir erinnern zunächst an die quadratischen Reste modulo 3:

t	0	1	2
t^2	0	1	1

TABELLE 2. Quadratische Reste $\pmod 3$.

Wenden wir uns nun dem Ausdruck $\frac{x^2y^2+1}{3(x+y)}$ zu.

Der Nenner ist ein Vielfaches von 3 (also $\equiv 0 \pmod 3$).

Im Zähler ist x^2 (bzw. auch y^2) entweder kongruent zu 0 oder zu 1 modulo 3. Ist einer der beiden Quadrate kongruent zu 0 modulo 3, so gilt dies auch für das Produkt x^2y^2, andernfalls ist dieses kongruent zu 1 modulo 3.

Addiert man 1, so gilt nun entweder $x^2 + y^2 + 1 \equiv 1 \pmod 3$ oder $x^2 + y^2 + 1 \equiv 2 \pmod 3$. Somit ist der Ausdruck in keinem Fall durch 3 teibar.

Aufgabe 4.13.
Sei t ein gemeinsamer Teiler des Zählers und des Nenners.

Wir verwenden zunächst die Teilerregel

$t \mid a \Rightarrow t \mid ka$,

und stellen fest, da t den Zäler teilt, dass wegen $t \mid 21n + 4$ auch $t \mid 2 \cdot (21n + 4) = 42n + 8$ gilt.

Da t auch den Nenner teilt, folgt aus $t \mid 14n + 3$, dass $t \mid 3 \cdot (14n + 3) = 42n + 9$.

Wir wenden nun die folgende Teilerregel an:

Aus $t \mid a$ und $t \mid b$ folgt $t \mid a + b$

Es gilt also, dass $t \mid ((42n + 9) - (42n + 8)) = 1$, also $t \mid 1$. Daraus folgt unmittelbar, dass der Zähler und der Nenner relativ prim (d.h. teilerfremd) sind.

Aufgabe 4.14. Klarerweise kann 0 nicht auftreten. Wenn die Zahl die Ziffer 5 enthält, dann muss die Einerziffer der Zahl 5 sein, sonst wäre sie nicht durch 5 teilbar. Dann ist die Zahl aber ungerade und kann durch keine gerade Zahl teilbar sein. Da die Zahl aber durch sieben verschiedene Ziffern teilbar ist muss sie gerade sein und folglich kann die Zahl auch 5 nicht enthalten. Die Ziffernsumme der jetzt noch möglichen Ziffern ist $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 = 40$ Würde als dritte Ziffer 1 nicht auftreten, dann wäre die Ziffernsumme 39 und die Zahl wäre nicht durch 9 teilbar. (Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn die Ziffernsumme durch 9 teilbar ist.) Die Zahl muss also 1 enthalten. Analog argumentiert man bei den Ziffern $2, 3, 6, 7, 8$. Würde die Ziffer 9 nicht auftreten, dann wäre die Ziffernsumme 31 und die Zahl wäre nicht durch 3 teilbar. Die Zahl muss also auch 9 enthalten. Wenn hingegen die Ziffer 4 nicht in der Zahl enthalten ist, dann hat man die Ziffernsumme 36 und die Zahl ist durch 9 (als auch durch 3) teilbar.

Die Zahl enthält also nicht die Ziffern $0, 5$ und 4.

Eine Möglichkeit für so eine Zahl ist 2983176.

Aufgabe 4.15.
Sei die kleinste der vier aufeinanderfolgenden Zahlen $x - 1$. Dann betrachten wir die Gleichung

$$(x - 1) \cdot x \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) + 1993 = a^2 \tag{25}$$

mit einer passenden ganzen Zahl a und wollen zeigen, dass ein solches a nicht existiert.

Dazu erinnern wir an die quadratischen Reste modulo 5:

t	0	1	2	3	4
t^2	0	1	4	4	1

Tabelle 3. Quadratische Reste $\pmod 5$.

Wir unterscheiden nun die folgenden Fälle:

Fall 1. Einer der Faktoren auf der linken Seite von (25) ist durch 5 teilbar. Dann ist die linke Seite kongruent zu 3 modulo 5 und die rechte laut Tabelle entweder 0, 1 oder 4. Das ist ein Widerspruch.

Fall 2. Keiner der Faktoren ist durch 5 teilbar. Dnn ist die linke Seite kongruent zu $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \equiv 7 \equiv 2 \pmod 5$. Wie im vorigen Fall ist dies ein Widerspruch.

Wir haben also durch einen Widerspruchsbeweis mittels Betrachtung der gegebenen Gleichung modulo 5 gezeigt, dass es keine derartigen vier Zahlen gibt.

Aufgabe 4.16.

a) Wir betrachten zunächst die Potenzen von 3 bei Division durch 10:

n	0	1	2	3	4	5	6	
3^n	1	3	9	7	1	3	9	usw.

Tabelle 4. Reste der Potenzen von 3 $\pmod{10}$.

Aus der Tabelle entnehmen wir, dass sich in einem Viererrhythmus die Rest 1, 3, 7 und 9 wiederholen. (Man kann auch mittels vollständiger Induktion nachweisen, dass für alle $n \geq 0$ gilt, dass $3^n \equiv 3^{n+4} \pmod{10}$ ist. Als Induktionsbasis benötigt man für jeden der vier Fälle einen Wert, also $n = 1$, 2, 3 bzw. 4.)

Für die Vielfachen von 4 erhält man immer 1, also auch für 100. Die Einerstellen von 3^{100} ist demnach 1.

b) Um diese Teilaufgabe zu lösen betrachten wir den Ausdruck 3^{100} einerseits $\pmod 4$ und andererseits $\pmod{25}$.

Für gerade n ist $3^n \equiv 1 \pmod 4$, denn für $n = 2k$ gilt, dass
$3^n = 3^{2k} = (3^2)^k = 9^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod 4$.
(Dies kann man natürlich alternativ auch durch vollständige Induktion nachweisen).

Für den Modul 25 wäre eine Tabelle der Reste der Potenzen von 3 sehr umfangreich. Deshalb verwenden wir eine andere Idee:

Es gilt

$3^{99} = (3^3)^{33} \equiv 2^{33} \equiv 2^{30} \cdot 2^3 \equiv (2^5)^6 \cdot 8 \equiv 7^6 \cdot 8 \equiv (7^2)^3 \cdot 8 \equiv (-1)^3 \cdot 8 \equiv 17 \pmod{25}$.

Daraus folgt, dass $3^{100} = 3^{99} \cdot 3 \equiv 17 \cdot 3 \equiv 51 \equiv 1 \pmod{25}$ ist.

Jetzt untersuchen wir die Zahlen der Form $25u + 1$ (also 1, 26, 51, 76), welche davon auch von der Form $4k + 1$ ist.

Die Lösung ist also 1 (d.h. 01) und die Zehnerziffer ist folglich 0.

Aufgabe 4.17.

Für den ersten Summanden gilt: $n_0 = 1$ Wir betrachten S $(i) \pmod 2$ und $(ii) \pmod 5$

i) $\pmod 2$

Der erste Summand ist 1. die restlichen 2000 Summanden ergeben in jedem Fall eine gerade Zahl.Also ist $S(n) \equiv 1 \pmod 2$

ii) $\pmod 5$

n	n^2	n^3	n^4	$\sum$
0	0	0	0	0
1	1	1	1	4
2	4	3	1	0
3	4	2	1	0
4	1	4	1	0

Vier aufeinander folgende Summanden liefern in allen Fällen, ausgenommen $n \equiv 1 \pmod 5$, die Summe 0.

Fall $n \equiv 1$:

In diesem Fall beachten wir, dass diese Vierersumme 500 mal vorkommt und somit die Gesamtsumme $S(n) \equiv 1 + 500 \cdot 4 \equiv 1 \pmod 5$ ist.

Für die Einerziffer $E(S(n))$ wissen wir somit, dass sie ungerade und $\equiv 1 \pmod 5$ ist. Also gilt $E(S(n)) = 1$

Aufgabe 4.18.

Wir formen um:

$$x \cdot (x + y) = 2021 = 1 \cdot 2021 = 43 \cdot 47$$

Da x und y positiv sind gilt $x < x + y$ und deshalb gibt es die beiden Lösungspaare

$$(x,\, y) \in \{(1,\, 2020), (43,\, 4)\}.$$

Aufgabe 4.19.

Klarerweise gilt $x > y$. Durch Primfaktorzerlegung stellen wir fest, dass $117 = 3 \cdot 3 \cdot 13$. Wir Faktorisieren die linke Seite der Gleichung und erhalten

$$(x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2) = 1 \cdot 117 = 3 \cdot 39 = 9 \cdot 13.$$

Da $x - y < y^2 + xy + y^2$ kann kein weiterer Fall auftreten.

Nur der Fall $x - y = 3$ und $x^2 + xy + y^2 = 39$ führt auf das Lösungspaar $(x,\, y) = (5,\, 2)$.

Aufgabe 4.20.

$(0|0)$ ist eine Lösung. Wenn x positiv ist, so ist die linke Seite $LS > RS$. Wenn x negativ ist, so ist $LS < RS$.
Wir setzen $y = x + k$ $x^2 + 3x = x^2 + 2kx + k^2$
$x(3 - 2k) = k^2$ bzw. $x = \frac{k^2}{3-2k^2}$, wobei der nenner $\neq 0$ ist.
Also gilt: $(3 - 2k)|k^2 \cdot 2 \qquad (3 - 2k)|(3 - 2k) \cdot k$
Nach den Regeln für Teilbarkeit ist $(3 - 2k)$ auch Teiler von $2k^2 + 3k - 2k^2 = 3k$.
Somit $(3 - 2k)|3k \cdot 2$ und $(3 - 2k)|(3 - 2k) \cdot 3$ und auch$(3 - 2k)|9$.
$(3 - 2k)$ liegt also in $\{\pm 1, \pm 3; \pm 9\}$.
Das ergibt für k die Werte $1; 2; 0; 3; -3; 9; -9$
$L = \{(1|2); (1| - 2); (-4|2); (-4| - 2); (0|0); (-3|0)\}$.

Aufgabe 4.21.

Wir betrachten die Gleichung $7a + 8b = 14c + 28d$ modulo 7:

$$7a + 8b = 14c + 28d \equiv 0 + 8b \equiv 0 + 0 \pmod{7}.$$

Da die beiden Zahlen 8 und 7 relativ prim (d.h. zueinander teilerfremd) sind, muss $b \equiv 0 \pmod{7}$ gelten.

Wir betrachten die Parität der Ausdrücke (d.h. die Ausdrücke modulo 2). Die rechte Seite der Gleichung ist jedenfalls gerade, da $14c + 28d = 2 \cdot (7c + 14d)$ gilt. Da $8b = 2 \cdot 4b$ ebenfalls gerade ist, muss dies auch für $7a$ gelten. Deshalb ist a eine gerade Zahl.

Aus $7|b$ und $2|a$ folgt $14|a \cdot b$.

Aufgabe 4.22.
Wir formen die Gleichung äquivalent um:

$$\begin{aligned} 4a^2 + 4a &= b^2 + 3b && \mid +1 \\ 4a^2 + 4a + 1 &= b^2 + 3b + 1 \end{aligned}$$

Der Ausdruck auf der linken Seite ist ein vollständiges Quadrat, da $4a^2 + 4a + 1 = (2a + 1)$ gilt.

Da $(b + 1)^2 = b^2 + 2b + 1 < b^2 + 3b + 1 < b^2 + 4b + 4 = (b + 2)^2$, liegt die rechte Seite echt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadraten. Der Ausdruck $b^2 + 3b + 1$ kann selbst also kein Quadrat sein.

Aufgabe 4.23.
Angenommen, a und b sind beide ungerade, also kongruent zu 1 oder 3 modulo 4. Dann sind ihre Quadrate jedenfalls kongruent zu 1 modulo 4 und ihre Summe kongruent zu 2 modulo 4.

Da 2 kein quadratischer Rest modulo 4 ist, ist das ein Widerspruch und die Annahme deshalb falsch.

Quellenangabe zu den Aufgaben

Aufgabe 1.1.
von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.2.
von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.3.
von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.4.
von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.5.
aus [12, S. 64(i)], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 1.7.
siehe [1], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 1.8.
aus [1, 2017, Jahrgang 9, Runde 2], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team.

Aufgabe 1.6.
aus [10, JRW 2003, (Gerd Baron)], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 1.9.
aus [8], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team.

Aufgabe 1.10.
von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.11.
Folklore, bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team.

Aufgabe 1.19.
von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Tam

Aufgabe 1.23.
aus [10, LWA 2002], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 1.20.
Skriptum Ungleichungen, ÖMO

Aufgabe 1.21.
aus [11, JRW 2011], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 1.22.
Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.12.
aus [4, Aufgabe 2 (Walther Janous)], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 1.13.
Skriptum Ungleichungen, ÖMO

Aufgabe 1.14.
Skriptum Ungleichungen, ÖMO

Aufgabe 1.15.
Skriptum Ungleichungen, ÖMO

Aufgabe 1.16.
Skriptum Ungleichungen, ÖMO

Aufgabe 1.17.
aus [6, Aufgabe 1 (Walther Janous)], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 1.18.

Aufgabe 1.24.
von Karl Czakler

Aufgabe 1.25.
JRW 1976, Gerd Baron, bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 1.26.
siehe [11, JRW 2013 (Karl Czakler)], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 1.27.
von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.28.
von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 1.29.
[8, Gl. 4.14], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 1.30.
von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 1.31.
von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.32.
von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.33.
von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.34.
Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.35.
Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.36.
Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.37.
Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.38.
Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.39.
Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.40.
von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.41.
aus [7], übersetzt von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.42.
von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.43.
von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.44.
von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.1.
Folklore, siehe z.B. Wikipedia-Eintrag zu Türme von Hanoi.

Aufgabe 2.2.
von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.3.

Aufgabe 2.4. siehe [2, Flanders Junior Olympiads], übersetzt und bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 2.5.
ÖMO Seminar Raach, bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 3.1.
Geometrie Skriptum Oemo

Aufgabe 3.2.
aus [8], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 3.3.
von Karl Czakler

Aufgabe 3.4.
Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.5.
siehe [1, 571036], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 3.6.
Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.7.
Skriptum Geometrie, ÖMO

Aufgabe 3.8.
aus [9, LWA 1999], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 3.9.
von Karl Czakler

Aufgabe 3.10.
Geometrie A-Kurs, ÖMO – Skriptum (Zugriff nur mit ÖMO-Zugang möglich), bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 3.11.
Skriptum Ungleichungen, ÖMO (Zugriff nur mit ÖMO-Zugang möglich), bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 3.12.
[8, Gl. 5.35], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 3.13.
aus [8], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 3.14. siehe [1, 2017/2018], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 3.15.
Geometrie Skriptum Oemo

Aufgabe 3.16.
aus [8], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 3.17.
aus [14], übersetzt von Ivan Izmestiev im Rahmen eines Vortrags beim Kursleiter*innen-Seminar Mariazell 2020, bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 3.18.
aus [14], übersetzt von Ivan Izmestiev im Rahmen eines Vortrags beim Kursleiter*innen-Seminar Mariazell 2020, bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 3.19.
aus [14], übersetzt von Ivan Izmestiev im Rahmen eines Vortrags beim Kursleiter*innen-Seminar Mariazell 2020, bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 3.20.
[8, Gl. 5.36], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 3.21.
aus [8], bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 3.22.
[5, Aufgabe 4 (Gottfried Perz)] bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 3.23.
von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.24.
von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.25.
aus [13], übersetzt von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 4.1.
von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.2.
aus [8]

Aufgabe 4.3.
von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.4.
aus [8, Z 3.53], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team.

Aufgabe 4.5.
aus [13], übersetzt und bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 4.6.
aus [13], übersetzt und bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team.

Aufgabe 4.7.
von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.8.
von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.9.
von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.10.
aus [11, LWA 2011 (Stefan Wagner)], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 4.11.
Landeswettbewerb für Anfänger*innen 1990 (nachzulesen in [9])

Aufgabe 4.12.
aus [8]

Aufgabe 4.13.
[3, 1. IMO (1959)]

Aufgabe 4.14.
Aufgabe die im ÖMO Seminar in Raach vorgestellt wurde, bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 4.15.
Landeswettbewerb für Anfänger*innen 1993 (nachzulesen in [9])

Aufgabe 4.16.
von Josef Pech

Aufgabe 4.17.
Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.18.
von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.19.
aus [12], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 4.20.
Von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.21.
[11, LWA 2012, (Walther Janous)],bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 4.22.
aus [10, LWA, 2005], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 4.23.
aus [13], übersetzt und bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Literatur

[1] Archivierte Aufgaben der Deutschen Mathematik-Olympiade. https://www.mathematik-olympiaden.de/moev/index.php/aufgaben/aufgabenarchiv. (aufgerufen am 2. Januar 2024).

[2] Art of Problem Solving. https://artofproblemsolving.com/community. (aufgerufen am 2. Januar 2024).

[3] Internationale Mathematik-Olympiade. https://www.imo-official.org/problems.aspx. Alle IMO - Angaben und die meisten IMO-Shortlists vergangener Jahre (aufgerufen am 2. Januar 2024).

[4] Junior-Regionalwettbewerb 2015. https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/102. (aufgerufen am 2. Januar 2024).

[5] Junior-Regionalwettbewerb 2016. https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/204. (aufgerufen am 2. Januar 2024).

[6] Junior-Regionalwettbewerb 2018. https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/440. (aufgerufen am 2. Januar 2024).

[7] Titu Andreescu. *Mathematical Olympiad Treasures*. Birkhäuser, 2006.

[8] Tom Ballik. *Mathematik-Olympiade (für Anfänger)*. ikon VerlagsGesmbH, 2012.

[9] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 1990–1999: Aufgaben und Lösungen*. öbv, 1999.

[10] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2000–2008: Aufgaben und Lösungen*. Nova MD, 2018. Auflage 1.3.

[11] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2009–2018: Aufgaben und Lösungen*. Nova MD, 2019.

[12] Jiri Herman, Radan Kučera, Radan Kucera, Jaromír Šimša, and Jaromir Simsa. *Equations and inequalities: elementary problems and theorems in algebra and number theory*, volume 1. Springer Science & Business Media, 2000.

[13] Loren C Larson. *Problem-Solving Through Problems*. Springer Science & Business Media, 2012.

[14] Viktor Vasil'evič Prasolov. *Zadači po planimetrii*. Nauka, 1986. Planimetrische Aufgaben, (Auf Russisch).